Richelot:

Vorlesungen über Me-
chanik.

Sommersemester 1869.

Aus Richelot's Vorlesungen über Mechanik im Sommersemester 869

30/4 869

Die Mechanik ist eine Disciplin der angewandten Mathematik, welche der reinen Mathematik am nächsten steht, es sei denn dass man die Geometrie zur angewandten Mathematik rechnet, die dann natürlich mit der reinen näher verwandt ist, denn wollen wir in ihr Grössen ~~math~~ analytisch darstellen, so brauchen wir nur 2 bis 3 Grössen, die Coordinaten, zu denen in der Mechanik noch eine, die Zeit hinzutritt. – Letztere ist deshalb auch von Manchen Geometrie mit 4 Dimensionen genannt worden, so von Lagrange in seiner „Theorie des Fonctions", deren dritter Theil der Mechanik gewidmet ist. –

Aristoteles's ~~d.~~ Bedeutung in der Mechanik

Schon zu den ältesten ~~Zeiten~~ griechischen Zeiten beschäftigten sich die Philosophen mit Problemen aus der Mechanik, eine einigermassen zusammenhängende Theorie dieses Gegenstandes finden wir doch ~~nur~~ erst bei Aristoteles, in seinen Quaestiones Mechanicae. – ~~Der~~ Fourier hat sich über diesen Gegenstand weitläufig in der Einleitung zu einer Abhandlung ausgelassen, in der er wohl den besten Beweis des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten giebt. – (5. Cahier des Journals der polytechnischen Schule). – Aristoteles Begriffe und Sätze aus der Mechanik wurden, wie es auch mit den anderen Disciplinen geschah, mehrere Jahrhunderte lang übermässig gelobt, dann aber ohne Kritik verworfen (seit Galilei) und doch steht es fest, dass dieser Philosoph die wichtigsten Prinzipien der Mechanik gekannt hat. – So wären namentlich zu nennen: Prinzips der Zerlegung der Bewegung (2te Kapitel seines Werkes), Idee der Bewegung auf einer Curve, welche durch Centrifugalkräften hervorgerufen wird, Erklärung der Ursache des Gleichgewichts beim Hebel; ferner ein Hauptprinzip: wenn dieselbe Kraft dasselbe Massentheilchen auf zwei verschiedenen Umkreisen bewegt, so werden die Geschwindigkeiten sich wie die Umkreise verhalten; ~~die~~ die Kräfte sind gleich, wenn die bewegten Massen der Geschwindigkeit umgekehrt proportional sind.

(naturae auscultatione

Diese Begriffe wendet dann A. auf die einfachen Maschinen an; Rolle, Flaschenzug (die schiefe Ebene scheint er nicht gekannt zu haben). – Bei diesen Betrachtungen wirft er sonderbare Fragen auf z. B. Weshalb fliegt ein geworfener Körper nicht fortwährend? woraus hervorgeht, dass er das Beharrungsvermögen der Körper muss gekannt haben. –

Aus diesen Andeutungen ist ersichtlich, dass Aristoteles die Bewegung als Prinzip der Mechanik angesehen hat, weil er das Gesetz des Hebels aus seiner Bewegung abgeleitet hat. –

Archimed als Vertreter der Statik.

Auf die Arbeiten der übrigen Mechaniker des Alterthums wollen wir hier nicht näher eingehen, sondern nur den Repräsentanten der gerade entgegengesetzten Richtung, Archimed nennen. Er ist der Begründer der Statik, er leitet; er leitet das Hebelgesetz aus dem einfachsten Falle der ~~Statik~~ Wage ab, nämlich daraus, dass wenn die Arme gleich sind, auch die anzuhängenden Gewichte gleich sein müssen, damit Gleichgewicht statt finde. – Schriften über seine Maschinen, von denen wir einzelne dem Namen nach kennen, sind leider nicht bis auf uns gekommen. –

Er hat ausserdem die ganze Theorie der Schwerpunkte begründet, und aus dem Gleichgewichte des Hebels abgeleitet. –

Diese beiden Richtungen deren erste Repräsentanten Aristoteles und Archimed sind, sind ~~in~~ auch noch heute die einzigen wesentlich verschiedenen. –

Prinzipien der Statik

Wir werden uns hier zuerst mit der Statik beschäftigen, deren Haupt Prinzipien folgende sind:

1) Das Prinzip des Hebels
2) " " des Parallelogramms der Kräfte. –
3) " " des einfachen Flaschenzuges.
4) " " der ~~Kräftepaars~~ schiefen Ebene.
5) " " der Kräftepaare.
6 " " der virtuellen Geschwindigkeiten.

Von diesen haben die ~~drei~~ vier ersten die Eigenschaft, dass sich aus irgend einem derselben die drei anderen ableiten lassen mittelst geometrischer Betrachtungen und gewissen Axiomen. – Auf diese Prinzipien pflegt man dann die elementare Statik zu begründen. – Das

Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten

letzte Prinzip hat nicht die Haupteigenschaften eines Prinzips, das es nähmlich unmittelbar aus den Erfahrungen einer Disciplin genommen werden kann, im Gegentheil wird es, wenn man es nicht vorzieht, es nur zu erklären, wie es Lagrange that, immer aus einem oder dem anderen der ersten Prinzipien abzuleiten sein. – Es besitzt aber eine Eigenschaft, die seinen Werth immens erhöht, nähmlich die, dass man aus ihm unmittelbar die Gleichungen für sämmtliche Probleme der Statik, und auch der Dynamik, in höchster Allgemeinheit aufstellen kann. – Dieses lässt sich bequemer erreichen, wenn man das Prinzip nicht in der Form, in der es sein Entdecker Johann Bernoulli darstellte, sondern nach Lagrange mit Anwendung der Analytischen Geometrie aufstellt. – Es ist zwar dies ein gewisser Umweg, aber hat den Vortheil, dass man übersichtlich alles in denselben Variabeln ausgedrückt erhält. – Dasselbe Prinzip ist später von Maupertuis unter dem Namen loi de repos aufgefrischt, und 1751 von Euler unter demselben Namen in der Berliner Akademie illustriert. –

Literatur

Ein ebenso wichtiges als schwieriges Werk ist die Mechanik von Lagrange, in welches diese Vorlesungen indirect einführen sollen; aus diesem Buche haben auch alle französischen Mathematiker die über diesen Gegenstand schrieben entlehnt; die einzige Ausnahme macht Poisson, der in seinem Werke einen anderen Weg einschlägt. – Alle die anderen französischen Bücher von Duhamel, Sturm, Franqueur etc. sind eins wie das andere. –

Von deutschen Büchern ist das von Euler zu nennen, das aber heute den Anforderungen der Wissenschaft nicht mehr genügt; dann die „Vorlesungen über Dynamik" von Jacobi, welche für jenen Theil der sich auf die Hamilton–Jacobi-sche

Theorie bezieht, maassgebend sind. – Von Clebsch existiren zu diesen Vorlesungen wichtige Supplementar-abhandlungen, die wichtig sind, weil sie einen Zusammenhang zwischen Variationsrechnung und Mechanik bilden. –

1/5 869

Archimed's Begründung des Hebelgesetzes.

Wir beginnen mit der Begründung des Hebelgesetzes. Archimed geht bei seiner Begründung davon aus, dass wenn man an einer geraden Linie, an jeder Seite dasselbe Gewicht anhängt, und sie in der Mitte unterstützt, dieselbe sich im Gleichgewichte befindet. Nimmt man nun eine andere gerade Linie, und theilt sie in eine gerade Anzahl gleicher Theile, und hängt in der Mitte jedes dieser Theile ein gleiches Gewichte an, so muss auch Gleichgewicht stattfinden, wenn man die Linie in der Mitte unterstützt. – Es folgt dies durch wiederholte Anwendung jenes Axioms, indem man eine Anzahl solcher Hebel die im Gleichgewicht sind zusammensetzt. – Wenn man nun von den 2n Gewichten, die m ersten für sich, und die (2n–m) letzten für sich zusammenfasst, so giebt der Gedanke, dass es gleich sei ob man m einzelne Gewichte, oder in der Mitte der m Theile die Summe derselben aufhängt, und dass dasselbe ~~für~~ von den (2n–m) Gewichten gilt, unmittelbar das Hebelgesetz: beim Gleichgewichte verhalten sich die Hebelarme umgekehrt, wie die Gewichte; oder die Hebelmomente sind gleich. – Man versteht unter Hebelmoment das Product ~~aus~~ des Perpendikels vom Unterstützungspunkte auf die Richtung der Kraft und ~~aus~~ der Intensität der Kraft. –

Anwendung des Hebelgesetzes auf die Bestimmung des Schwerpunktes.

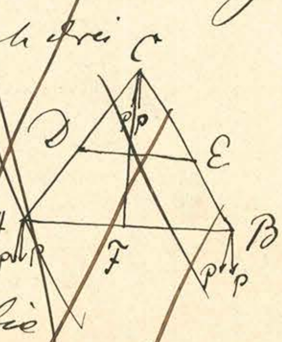
Mit Hülfe des Hebelgesetzes lässt sich der Schwerpunkt finden, indem man ihn erst für zwei belastete Punkte sucht, dann einen dritten, vierten etc. hinzu nimmt. – Man kann also erst für ein System einzelner schwerer Punkte, dann auch für eine schwere Linie, Fläche etc. in der angegebenen Weise den Schwerpunkt finden. – Es ist dabei wichtig ~~für~~ den reinen Mathematiker, dass man hieraus, indem man die Betrachtung in Formeln übersetzt, eine vollständige Rechnungsmethode – Barycentrischer Calcül – abgeleitet hat. Vertreter dieser Theorie ist Möbius. – Die Auffindung des Schwerpunktes von 3 belasteten Punkten, kann auf dreierlei Art, durch verschiedene Combinationen geschehen. – Führt man das aus so erhält man den Satz vom Dreieck; dass sich die drei Schwerlinien in einem Punkte schneiden. – Auf dieselbe Art kann man geometrische Sätze über ~~Dreieck~~ 4 eck, 5 eck ... n Eck finden. –

In dem Beweis von ~~Huygens~~ Archimed fand Huygens einen wesentlich unrichtigen Schluss (er schrieb ein besonderes Werk darüber: demonstratio equilibrii bilancii 1694) und hat einen anderen Beweis gegeben. – Der faule Punkt ist der, dass man sagt, man könne statt der m gleichweit aufgehängten Gewichte ein m-Gewicht in der Mitte aufhängen, weil dabei vorausgesetzt wird, dass wenn an jedem Arme des Hebels ein 1-Gewicht hängt, dass dann im Unterstützungspunkte ein 2-Gewicht wirkt; oder dass wenn Gleichgewicht stattfinden soll, dann im Unterstützungspunkte ~~den~~ an den Armen wirkenden Kräften parallel aber entgegengesetzt eine Kraft wirken muss die so gross ist, wie die beiden an den Hebelarmen wirkenden zusammen. – Soll die Archimed-sche Ableitung geltend sein, so muss diese Voraussetzung als Axiom angenommen, ~~oder~~ und durch die Erfahrung bestätigt ~~aus anderen Axiomen bewiesen~~ werden. –

Huygens Einwand gegen Archimeds Ableitung des Hebelgesetzes.

Die Lücke in der Archimed'schen Ableitung erfüllte Lagrange, indem er das erwähnte Axiom durch Gewichtsaufhängungen bewies. – Man denke sich ein Dreieck aus homogenen geraden Seiten und stelle sich dieselben zuerst einzeln vor. – Denke man sich drei homogene Geraden AB, AC, und CB zuerst einzeln, auf den beiden Endpunkten eines jeden derselben Länge je ein gleiches Gewicht P. – Setzt man diese Hebel in der Weise zusammen wie es die Figur zeigt, und unterstützt die Mittelpunkte D, E, F, des einzelnen Hebel AC und CB so ~~in das System in~~

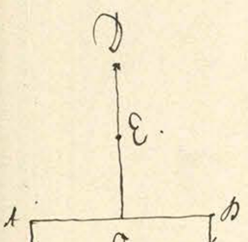
Lagrange's Ergänzung zu Archimeds Ableitung



~~Gleichgewicht. – Die Beseitigung dieser Punkte kann dadurch bewirkt werden dass die festen Geraden DE und dann darüber CF gelegt werden. – Dann ist~~

~~Wenn man nun diese Hebelzusammenstellung wie es die Figur zeigt, und unterhalb der Aufhängepunkte D und E der Hebel CA und CB eine feste Gerade legt,~~

Ich kann mir das von Richelot an dieser Stelle Gesagte nicht klar machen, noch weniger diese Stelle in der Ausarbeitung Reuters, der Beweis des Axioms, dass wenn an den Enden einer Gerade zwei gleiche Kräfte wirken, dann man diesen das Gleichgewicht halten kann durch ein in dem Mittelpunkte zwischen ihnen in entgegengesetzter Richtung wirkendes doppeltes Gewicht, scheint mir aber folgendermaßen geführt werden zu können. Ich denke auch dass der von Richelot angegebene Beweis mit diesem im wesentlichen übereinstimmt.



Haben wir die fest verbundenen homogenen Stäbe DACB, an welchen AC = CB ist, hängen dann in A das Gewicht P in B ebenfalls das Gewicht P, in D dagegen das Gewicht 2P auf, und unterstützen dann den Punkt E (DE = EC) so zeigt uns die Erfahrung dass Gleichgewicht vorhanden ist. Hieraus folgt dass die in A und B aufgehängten gleichen Gewichte auf dem ~~Heb~~ gleicharmigen Hebel DC so wirken, wie ein in C aufgehängtes Doppeltes Gewicht, also auch dass, wenn wir die Gewichte 2P von D wegheben, wir dann um Gleichgewicht herzustellen in C das Gewicht 2P in entgegengesetzter Richtung anbringen müssen.

Huygens Beweis des Hebelgesetzes.

Huygens vermeidet die Benützung dieses zuletzt genannten Axioms, und leitet das Hebelgesetz für irgend zwei Commensurable aus dem gleicharmigen Hebel ab.

~~Der Einfachheit halber beweisen wir es für die Se-~~

wichte 6 und 10, denn es ist dann selbstverständlich, wie es für die Gewichte n und m zu beweisen ist, wenn n und m ganze Zahlen sind. –

Ich will hier nicht das entschiedene Stück, was bei Reuter steht abschreiben. –

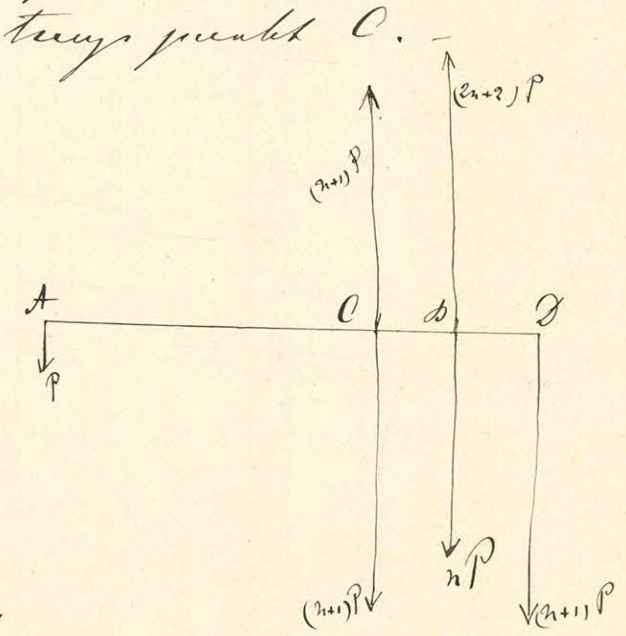
Ein 3^te^ Beweis des Hebelgesetzes rührt von D'Alembert her. – Dieser Beweis geht davon aus, dass Gleichgewicht stattfindet, wenn in zwei Punkten einer starren Linie zwei parallele und gleiche, in der Mitte die doppelte und entgegengesetzt parallele Kraft wirken. – ~~Durch die Mitte~~

D'Alemberts Beweis.

Durch ~~die hier~~ Archimeds Beweis, leiteten ~~wir~~ das Hebelgesetz ~~abgeleit~~ für irgend zwei in rationalem Verhältnisse stehenden Gewichte P und nP ab. – Wir wollen es nun für Gewichte ableiten die im Verhältnisse m : n zu einander stehen, wo m und n beliebige ganze Zahlen bedeuten. – Auf dem Hebel AB, soll in A das Gewicht P in B das Gewicht nP wirken, wo n eine ganze Zahl. – Für diesen Fall ist das Hebelgesetz schon bewiesen, diesem gemäss sei der Unterstützungspunkt C. –

Das Hebelgesetz für Gewichte die in irrationalem Verhältniss zu einander stehen.

In dem Punkte C lassen wir nun nach oben das Gewicht (n+1) P, und nach unten ein dasselbe Gewicht wirken, wodurch offenbar am Gleichgewichte nichts verändert wird. – Nach dem Hebelgesetze ist CB = 1, CA = n.



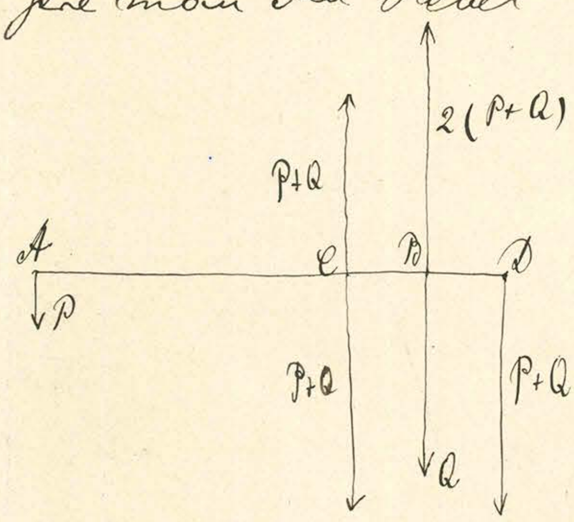
Nun verlängere man den Hebel über B hinaus, um das Stück BD = CB, und lasse dann in D (n+1) P und in B nach oben (2n+2) P wirken. – Es heben sich dann die Wirkungen in C auf, und von den Wirkungen in B heben sich n gegen n, es bleiben also nach oben wirkend (n+2) P, und wir haben somit das Hebelgesetz für (n+1) P und P richtig gefunden. – Wenn wir so das Gesetz bewiesen haben für die Gewichte P und (n+1) P so ~~hatten~~ können wir es ebenso fortfahrend auch für P und (n+2) P und für P und (n+3) P oder auch für P und (

Da wir ~~bewiesen haben~~ bewiesen dass das Gesetz richtig ist für die Gewichte 1 und 1 so können wir auf diesem Wege beweisen dass es für 1 und 2 richtig ist, so auch für 1 und 3 u. s. w.

1 und n

Durch diese Art der Beweisführung wird sich aber ~~auch~~ das Hebelgesetz auch für $(m+1)P$ und nP beweisen lassen, wenn seine Gültigkeit für mP und nP bereits festgestellt ist. – Dann lässt sich aber schliessen, da es für 1 und n galt, so wird es auch für 2 " n also auch für 3 " n etc. und schliesslich auch für m und n gelten. —

Man kann dieses letztere auch direct beweisen. – Es mögen die Gewichte P und Q sich verhalten, wie $m:n$, man theile dann den Hebel nach demselben Verhältniss, so dass $CA = n$, und $CB = m$ wird, und lasse in A das Gewicht P, und in B, Q wirken, endlich in C nach oben das Gewicht $(P+Q)$ und verlängere man den Hebel über B um $BD = BC$ und hänge in D das Gewicht $P+Q$, und auch in C das Gewicht $P+Q$ an, und lasse in B das Gewicht $2(P+Q)$ nach oben wirken, dann sind die beiden einzelnen Systeme ACB und CBD in Gleichgewicht, setzt man sie aber zusammen, so kann dies Gleichgewicht nicht gestört werden.



Nun hebt sich aber die Wirkung von $(P+Q)$ in C nach oben und unten auf, ferner die Wirkung des Q nach unten gegen die Wirkung eines Q-1 ~~in B~~ nach oben in B, und es bleibt also der Hebel ABD im Gleichgewicht, woran in A, P, in D $P+Q$ und B $2P+Q$ wirken; es wird also

$$(m+n)P = m(P+Q)$$

woraus:

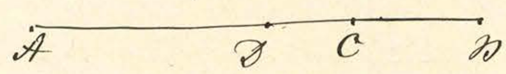
$$nP = mQ$$

Den Fall, in welchem die Gewichte incommensurabel sind, wollen wir mit Hülfe der von Euklid erfundenen Methode der Demonstratio ad absurdum absolviren.

Hebelgesetz für incommensurable Gewichte.

Das Absurde, zu dem wir in diesem Falle zurückkommen ist, dass wenn an einem Hebel irgend zwei Gewichte wirken, der zum Gleichgewicht erforderliche Unterstützungspunkt, ausserhalb des zwischen diesen beiden Punkten liegenden Hebeltheiles liegen soll; dieser Unterstützungspunkt muss vielmehr immer zwischen diesen Punkten liegen. –

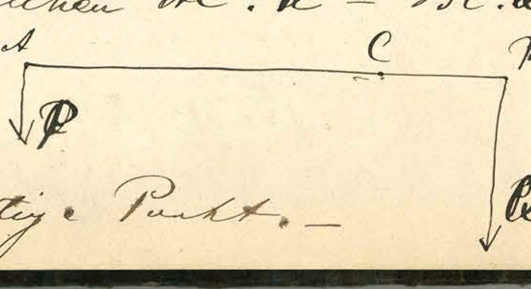
Aus diesem Axiom dessen Gegentheil das Absurde ist, folgt dass, wenn in A und B resp. die Kräfte P und Q wirken, und dann der Unterstützungspunkt sich in C befindet,



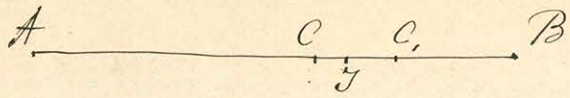
und man in A noch eine Kraft P' wirken lässt, so wird der Unterstützungspunkt näher nach A rücken, – Denn verbindet man den Hebel ACB mit einem zweiten ADC an dem das Gewicht (P+Q) in C wirkt, in D das Gewicht P+P'+Q nach oben in A das Gew. P' nach unten; so heben sich die Wirkungen in C auf, und es bleibt nur der Hebel ADB übrig wo in A (P+P') in B, Q und in D P+P'+Q nach oben wirkt. Da aber bei dem zur Hülfe genommenen Hebel ADC der Unterstützungspunkt D ~~offenbar~~ nach dem Axiom zwischen A und C liegen muss, so folgt auch dass, wenn das Gewicht in A vergrössert wird, dann auch der Unterstützungspunkt näher zu diesem Punkte rücken muss. –

Mit Hülfe dieser Folgerung des Axioms wollen wir beweisen, dass wenn das Verhältniss zwischen P und Q eine incommensurable Grösse ~~sind~~ ist, dann dann der richtige Unterstützungspunkt derjenige ist für welchen AC . P = BC . Q ist. –

Angenommen dieses wäre nicht der Fall, sondern C_1, der näher nach B liegt wäre der richtige Punkt. –



[illegible]



Man theile nun den Hebel AB in eine Anzahl gleicher Theile, die kleiner als CC_1 sind, dann muss ein Theilpunkt wenigstens zwischen C und C_1 fallen, derselbe bei J. – Für AJB haben wir das Hebelgesetz bereits bewiesen, nach demselben haben wir um auf dem in J unterstützten Hebel dem Gewichte Q in B das Gleichgewicht zu halten in A das Gewicht $P' = \frac{BJ}{AJ} Q$ aufhängen. – Es ist aber $BJ < BC$, $AJ > AC$, d. i. es ist $\frac{BJ}{AJ} < \frac{BC}{AC}$ ~~Nun ist aber~~ u. s. w.

Das Hebelgesetz gilt demnach für alle möglichen Gewichte. –

Ableitung des Prinzips des Parallelogramms der Kräfte aus dem Hebelgesetze. –

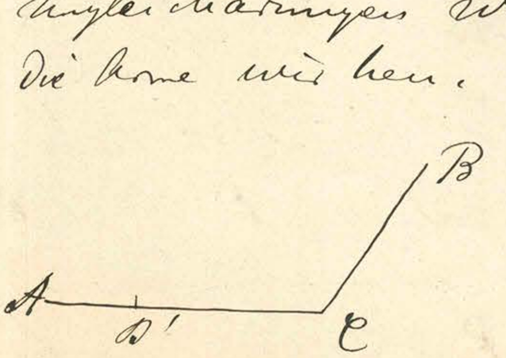
Zu der Ableitung des Prinzips des Parallelogramms der Kräfte aus dem Prinzip des Hebels sind wichtige dynamische Axiomen ~~Principien~~ erforderlich, wir wollen deshalb hier dieselben anführen. –

(Winkelhebel)

Wenn bei einem Winkelhebel mit gleichen Armen 2 gleiche Kräfte senkrecht auf dieselben wirken, so muss Gleichgewicht vorhanden sein. –

Dieses Axiom lässt sich nicht mehr durch Anhängungen von Gewichten beweisen; dasselbe sagt auch aus, dass wenn man die Kräfte rückwärts verlängert und sie auf ihren Schnittpunkt wirkend denkt, eine Kraft, die ihnen das Gleichgewicht halten soll, den Winkel den sie bilden halbiren muss. –

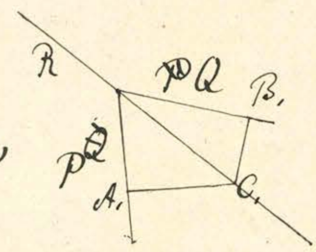
Wir leiten aus diesem Axiom zuerst das Gleichgewichtsgesetz für Kräfte ab, die an den Armen eines ungleicharmigen Winkelhebels senkrecht auf die Arme wirken. – Es sei ACB ein solcher Winkelhebel, bei dem $AC > CB$ sei und horizontal liege, in A wirke nach unten die Kraft P, in B wirke dagegen senkrecht auf CB die Kraft Q. – Wir



nehmen nun in AC einen Punkt B' an, so dass CB = CB' ist, und lassen hier das Gewicht Q nach oben und nach unten wirken. – Wir können uns dann den Apparat aus zwei Hebeln bestehend denken, einen Winkelhebel B'CB mit gleichen Armen, der nach dem Axiome im Gleichgewichte ist, dann einen geradlinigen CB'A, bei dem in A die Kraft P, in B' in entgegengesetzter Richtung die Kraft Q und in B' eine beliebige todte Kraft wirkt. – Für diesen Hebel gilt auch das Gesetz $AC \cdot P = B'C \cdot Q$; da nun $B'C = BC$ ist, so wird auch das ~~Gesetz~~ der Winkelhebel hiermit bewiesen sein, dass $\overline{AC}\, P = \overline{BC} \cdot Q$ ist, d. i. beim Gleichgewichte müssen die Momente an beiden Seiten des Winkelhebels gleich sein. –

Diese Betrachtung führt nun auf das Parallelogramm der Kräfte. –

Eine Abl. der Kräfteparallelogramm



Zuerst ist einzusehen, dass, wenn drei Kräfte P, Q, R auf einen Punkt wirken dann $P : Q = \sin(R,Q) : \sin(R,P)$ sein muss. – Dazu denken wir uns die Kraft R nach rückwärts verlängert, und in dieser Verlängerung einen Punkt C, angenommen, von dem man auf die beiden anderen Richtungen Perpendikel C, A, und C, B, fällt. – Lasse man nun in A die Kraft P, in B die Kraft Q und in C, die Kraft R, ~~ge nach beiden entgegengesetzten Richtungen wirken~~. – Nimmt man den Punkt C, fest an, so übt die Kraft R ~~in C,~~ keine andere Wirkung aus, als einen Druck auf C, und es bleiben nur die Kräfte P und Q übrig, welche in A, resp in B, auf die Arme des Winkelhebels A, C, B, senkrecht wirken, wir können deshalb unser bereits abgeleitetes Gesetz anwenden, und erhalten: $\overline{C_1 A_1}\, P = \overline{C_1 B_1}\, Q$, also

$$P : Q = \sin(Q,R) : \sin(P,R)$$

R muss also wenn Gleichgewicht vorhanden sein soll, in der Richtung der Diagonale des mit P und Q als Seiten construirten Parallelogramms liegen. –

Verfährt man nun ebenso mit R und Q, statt P und Q, so erhält man:

$$R : Q = \sin(Q,P) : \sin(R,P)$$

Und wenn man dies mit dem ersteren Resultate verbindet, so ergiebt sich, dass R auch seiner Intensität nach gleich der Diagonale sein muss.–

Beweis des Parallelogramms der Kräfte aus dem Hebelgesetz, mit Hilfe der Poinsot-schen Axiome.–

Es liegt in dieser Deduction eine Vermischung der Principien des Hebels und des Parallelogramms der Kräfte. In der Ableitung des letzteren, die Poinsot in ganz anderer Art, als wir sie reproduciren werden, gegeben hat, tritt diese Vermischung noch mehr heraus, dieselbe ist daher auch anzugreifen.–

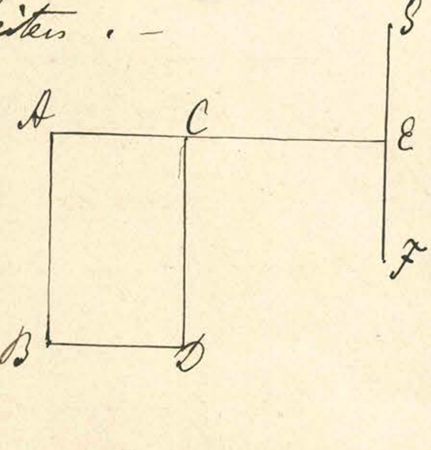
Poinsot hat das Hebelgesetz auf die Grundlage folgender Axiomen basirt:

Wenn in einem freien Punkte drei Kräfte wirken, die sich das Gleichgewicht halten, so liegen sie in derselben Ebene;

Jede dieser Kräfte liegt in dem überstumpfen Winkel der beiden anderen;

Sind zwei Kräfte gleich, so halbirt die dritte diesen Winkel.–

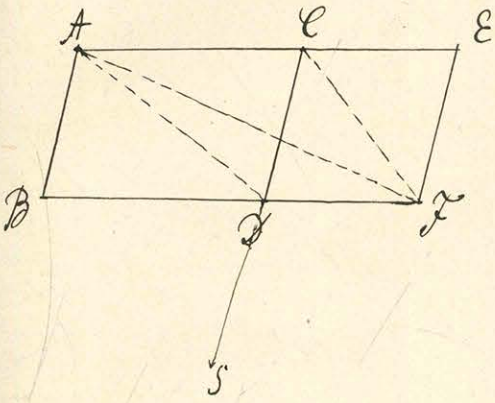
Damit hat er bewiesen, dass die Kraft welche zweien parallelen Kräften das Gleichgewicht hält, zwischen ihnen liegen und ihnen entgegengesetzt parallel sein muss, sind jene beiden Kräfte gleich, so muss die ihnen das Gleichgewicht haltende Kraft in der Mitte zwischen ihnen liegen. – Daraus lässt sich das Parallelogramm der Kräfte folgendermassen ableiten.–



Man construire ein Rechteck aus den Kräften P und Q, es sei dasselbe ABCD, verlängere AC über C und CE = P und lasse in E senkrecht auf CE die Kraft Q nach beiden Seiten wirken.– Hierdurch ist in Bezug auf die zu untersuchende Kraft nichts geändert. Nach dem Hebelgesets muss nun die Resultante von $ED = Q$ und $AB = P$ nothwendig die Richtung CD haben; die Resultante von $AC = Q$ und $EF = Q$ muss nach dem 3ten Poinsot'schen Axiom die Richtung ED haben, da sie ja den Winkel CEF halbirt; da also beide Resultanten durch D gehen, so muss auch die Resultante von P und Q durch D gehen. –

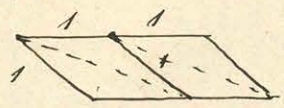
Auf die Poinsot'schen Axiome gestützt gab Duchayla einen Beweis des Princ. d. P. d. K., dem Richelot entschieden vor allen anderen den Vorzug giebt. –

Der Duchayla'sche Beweis des Princips des Kräfteparallelogramms.



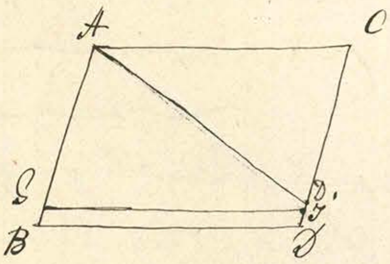
Denken wir uns ein Parallelogramm $ACBD$, wo in der Richtung AB die Kraft P, in AC die Kraft Q wirke; dann ein zweites $CEDF$ wo in der Richtung CE die Kraft R wirkt. – ~~(In der Richtung Q wirkt P, und in derselben P wie in AB etc.)~~ – Es soll nachgewiesen werden, dass, wenn die Resultante von P und Q, und die von P und R in den respectiven Diagonalen liegen, dass dann auch die Resultante von P und $Q + R$ in der Richtung der Diagonale AF liegt. – Verlegt man die Resultante von P und Q in den Punkt D (hierbei, wie schon an anderen Stelle ist Gebrauch gemacht von dem unerwähnt gelassenen Axiom, dass man den Angriffspunkt ~~einer~~ Kraft in einen beliebigen Punkt der Kraftrichtung verlegen kann (E,)) so ändert sich nichts an dem System, da zerlege man die Resultante, u. zwar in eine Kraft die in der Richtung DS wirke und $= P$ sei, und einer Kraft, welche $= Q$ ist und von D aus durch F hindurchgehend wirkt. – Die Kraft P verlege man aber von D nach C, so wird die Resultante von P und R durch F hindurchgehen. – Demnach haben wir in F ~~die Kräfte~~ zwei Kräfte wirken, deren Resultante durch sie hindurchgehen muss, und haben bewiesen dass die Resultante der Kräfte P und $Q + R$, mit der Diagonale ~~zusammenfällt~~ dieselbe Richtung hat. –

Da nach den Poinsot'schen Axiomen für die Gewichte 1,1 ~~bewiesen~~ ist die Resultante in der Richtung der Diagonale fallen muss so kann man ein Parallelogramm construiren, wie folgt:



und kann aus demselben das Parallelogr. der Kräfte für die Gewichte 1 und 2 ableiten. — So fortfahrend beweist man es für 1 und 3, 1 und 4, 1 und m 1 und n, und auch für 2 und 3, 2 und 4, 2 und m, endlich auch für m und n. —

Sollen die Gewichte incommensurable sein können, so bedarf es einer besonderen Behandlung. — Nehme man an es sei für solche der Satz nicht richtig. — Die

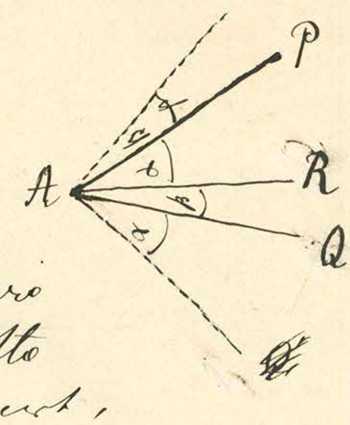


Diagonale gehe also in eine andere Richtung als in der der Diagonale, und schneide DC im Punkte D_1; dann theile man CA in so viel gleiche Theile dass ein jeder kleiner als DD_1 sei und trage solche Theile von C an auf ~~— (es wird dann~~ Diag jedenfalls ein Theilpunkt zwischen D und D_1 zu fallen kommen, dieser sei J. — Zieht man nun durch J eine parallele zu BD die AB im Punkte G schneidet, so wird AJ als Resultante der Kraft AC = Q und der durch AG repräsentirten Kraft P' erscheinen. — Nun ist aber offenbar $P' < P$, aber die Resultante AJ liegt näher an AB als die Resultante AD_1, so dass die Resultante der 2 Kräfte P und Q weiter von der Richtung von P entfernt ist, als eine Resultante von P' und Q, wo $P' < P$ ist, aber in derselben Richtung wirkt. — Dies führt auf die Absurdität, dass die Resultante 2er Kräfte ausserhalb des von ihren gebildeten Winkels liegt. —

5 Juni

Beweis des Princips des Parallelogramms der Kräfte von Daniel Bernoulli.

In den Petersburger Commentaren veröffentlichte Daniel Bernoulli einen Beweis des Princips des Par. d. Kräfte, die dann auch Moigno in seine Leçons aufnahm. — Dieser Beweis beruht auf einer geometrischen Betrachtung. — Es sollen in einem Punkte, drei Kräfte P, Q, R wirken, und zwar wollen, wie die Winkel $P,R=\alpha$ $Q,R=\beta$ mit einander bilden. – Es soll R als Resultante betrachtet werden. – Man trage nun ~~nach~~ an AP den Winkel β und an AQ den Winkel α nach aussen an, und lasse in den neuen Richtungen die Kräfte P' und Q' wirken, welche durch folgende Eigenschaft bestimmt sein sollen: es sollen Q' und R ebenso wie Q, P' und R ebenso wie P wirken. – Wenn man die 3 Kräfte P, Q, R mit einem Factor multiplicirt, so wird doch ihre Gesammtwirkung dieselbe bleiben. – Wir multipliciren sie einmal mit $\frac{P}{R}$, dann mit $\frac{Q}{R}$ und denken uns die neuen Kräfte in folgender Art wirksam: 1) $\frac{P^2}{R}, P, \frac{PQ}{R}$; davon wirke $\frac{P^2}{R}$ in der Richtung von R, P in seiner eigenen Richtung, $\frac{PQ}{R}$ in der Richtung von P'; 2) $\frac{PQ}{R}, Q, \frac{Q^2}{R}$; hiervon $\frac{PQ}{R}$ in der Richtung Q', Q in seiner eigenen Richtung, $\frac{Q^2}{R}$ in der Richtung von R. – Wenn also P und Q ebenso wie R wirken, so erhält man wenn man statt P und Q ihre gleichwirkenden Kräfte setzt, den Satz dass $\frac{2PQ}{R}$ gleichwirkend mit $\frac{P^2+Q^2}{R}$ ist. –



Nimmt man nun $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ an, so wirken die beiden Kräfte P, Q gerade gegeneinander in entgegengesetzter Richtung, heben sich also auf, und es muss deshalb die Mittelkraft $\frac{P^2+Q^2}{R}$ sein; sie ist aber auch der Annahme nach gleich R, also $\frac{P^2+Q^2}{R}=R$, oder

$$P^2+Q^2=R^2$$

D.h. die Intensität der Resultante von zwei senkrecht gegeneinander wirkenden Kräften ist als dem Princip des Kräfteparallelogramms gemäss als richtig nachgewiesen. – Es bleibt noch zu beweisen, dass wenn man aus der Ecke des Rechtecks einen Kreis mit dem Radius $R=\sqrt{P^2+Q^2}$ beschreibt, dann der Radius, ~~zu Resa~~ die Resultante angiebt, welche die Diagonale des Rechtecks bildet. – Dieses wollen wir nicht rein planimetrisch aus dem Axiom, sondern mit Rücksicht auf das Parallelepipedum der Kräfte beweisen. –

Wir denken uns drei Kräfte 1, $\sqrt{m}$, $\sqrt{n}$ rechtwinkelig aufeinander wirkend, und nehmen an, dass die Mittelkraft von 1 und $\sqrt{m}$ wirklich in der Diagonale liege, ebenso 1 und $\sqrt{n}$ in ihrer betreffenden Diagonale, dann lässt sich zeigen dass die Mittelkraft von $\sqrt{m}$ und $\sqrt{n}$ auch in der Diagonale des mit diesen Kräften als Kanten gebildeten Parallelepipeds liegen muss. – Die Mittelkraft aus den drei Kräften liegt einmal in der Ebene die durch die Diagonale $(1, \sqrt{m})$ und der Kante $\sqrt{n}$ gelegt ist, dann aber auch in der Ebene die durch die Diagonale $(1, \sqrt{n})$ und der Kante $\sqrt{m}$ gelegt ist, also muss sie auch in der Diagonale des Parallelepipedums liegen. – Da sie nun auch in der Ebene liegt, die durch sie und die Kante 1 geht, so muss sie in der Diagonale von $(\sqrt{m}, \sqrt{n})$ liegen. –

Beweist man also dass die Mittelkraft von 1 und $\sqrt{m}$ in der Diagonale liegt, so hat man es in Folge dieser Bemerkung auch bewiesen, dass es für jede Kräfte $\sqrt{m}$ und $\sqrt{n}$ gilt. –

Stellt man um dies einzusehen, die drei Kräfte 1, 1, 1 senkrecht aufeinander und sucht ihre Mittelkraft auf drei verschiedene Weisen, so ergiebt sich unmittelbar daraus, dass hier d. i. bei zwei gleichen Kräften die Mittelkraft den Winkel zwischen diesen halbirt, der Satz für 1 und $\sqrt{2}$ gilt in dem Rechteck aus einer Kante 1 und der gegenüberliegenden Diagonale $\sqrt{2}$. – Daraus folgt dann ebenso die Giltigkeit für 1 und $\sqrt{3}$, indem man die Kräfte 1, 1, $\sqrt{2}$ zusammensetzt, also auch für 1 und $\sqrt{m}$. – Damit ist aber auch der Satz für alle Zahlen nachgewiesen, denn man kann, immer zwei Zahlen m und n finden, deren Wurzeln sich einem rationalen Verhältniss so weit nähern als man will. – (R. N.

mittelst Näherungsbrüchen). –

D'Alamberts Beweis des Parallelogramms der Kräfte.

Der D'Alambert'sche Beweis ist analytisch – er geht darauf los nachzuweisen, dass bei zwei gleichen Kräften die Intensität der Mittelkraft $2\cos x$ ist (oder $2p\cos x$, wo $p = 1$ die Kraft ist), falls die beiden Kräfte den Winkel $2x$ mit einander bilden. – Hat man das nachgewiesen, so kann man sagen: Wenn der Satz für 2α gilt, so muss er auch für α und $\pi - \alpha$, für $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$, für $\frac{3\alpha}{2}$ und $\frac{\pi}{2} - \frac{3\alpha}{2}$ etc. gelten; denn unter der Voraussetzung dass $\alpha = \beta$, können wir wie im Bernoulli-schen Beweise, die beiden Kräfte P und P die den Winkel α mit einander bilden, durch die drei Kräfte $\frac{P^2}{R}$, $\frac{2P^2}{R}$, $\frac{P^2}{R}$ ersetzen. – Nehmen wir also an der Satz sei für α richtig d. h. es sei $2P\cos\alpha$ die Mittelkraft zu P und P, so wird die Mittelkraft für $\frac{2P^2\cos\alpha}{2}$ und $\frac{2P^2}{R}$ gleich der Summe:

$$\frac{2P^2\cos\alpha}{R} + \frac{2P^2}{R} = \frac{4P^2}{R}\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

sein; nun ist aber R als diese Mittelkraft angenommen also muss:

$$R = \frac{4P^2}{R}\cos^2\frac{\alpha}{2} \quad \text{oder}$$

$$R^2 = 4P^2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

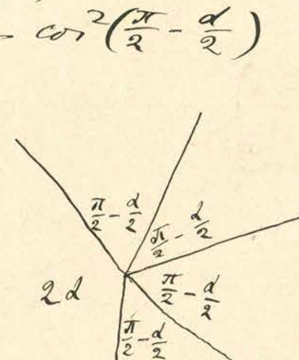
$$R = 2P\cos\frac{\alpha}{2}$$

sein, so dass wir die Richtigkeit auch für $\frac{\alpha}{2}$ nachgewiesen haben. – Ebenso lässt es sich für $(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2})$ beweisen, wenn es für $(\pi - \alpha)$ bewiesen ist, was der Fall ist, wenn es für α gilt, da ja dann nur alles rückwärts verlängert ist. – Es ist nämlich

$$\frac{2P^2\cos(\pi - \alpha)}{R} + \frac{2P^2}{R} = \frac{4P^2}{R}\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

dieses ist aber $= R$ angenommen, also wird:

$$R = 2P\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)$$



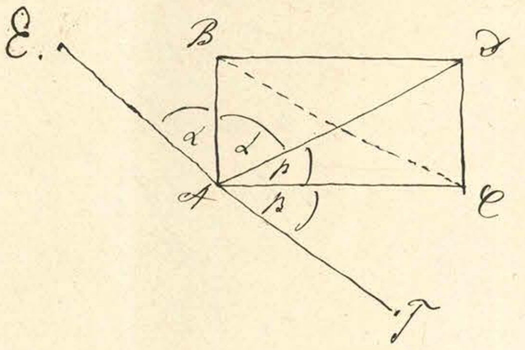
So kann man weiter gehen, indem man die Winkel und Complements-winkel theilt, so dass man dann auch die Gültigkeit des Satzes für:

$$\frac{\alpha}{2^n},\ \frac{3\alpha}{2^n} \ldots \frac{(2m-1)\alpha}{2^n} \quad \text{dann}$$

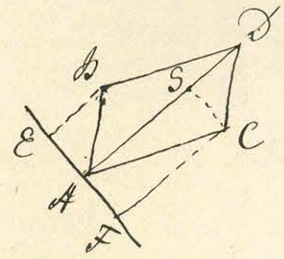
$$\frac{\pi-3\alpha}{2^n} \ldots \frac{\pi-(2m+1)\alpha}{2^n}$$

erhält. – Nun kann man aber m und n so wählen, dass der Winkel $\frac{2m-1}{2^n}\alpha$ einem gegebenen Winkel hinreichend nahe kommt, so dass der Satz für jeden Winkel bewiesen ist. –

Damit ist die Quantität der Mittelkraft bestimmt. –



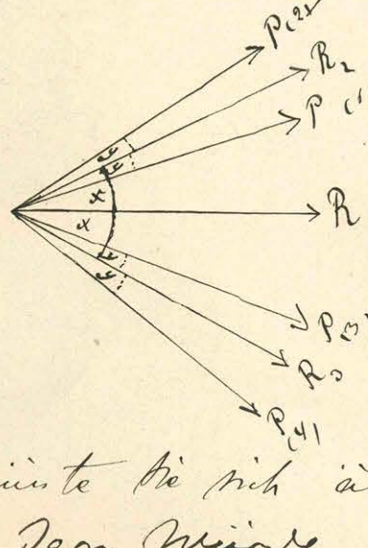
Die Richtigkeit der Richtung ergibt sich für den Fall, dass die Kräfte zu einander rechtwinkelig wirken folgendermassen: – Nach dem soeben bewiesenen Satze kann man statt der Kraft AB, die Kräfte AD und AE (AD=AE, ∡ BAE = ∡ BAD) setzen, und statt der Kraft AC, die gleichen Kräfte AD und AF; da EA und AF gleich sind, und entgegengesetzt wirken, so ist die Resultante AD, also die Diagonale des Parallelogramms. – Wirken die Kräfte nicht



DA ⊥ AF.

rechtwinkelig auf einander, so kann man wieder AB durch die Kraft AE und SD ersetzen, ferner AC ersetzen durch EA und AF, – da aber EA = AF, und somit sich die Kräfte aufheben, so ist die Resultante = AD somit in der Richtung der Diagonale wie bekannt. –

<u>Poisson's Beweis.</u> Dieser Bew. ist analytisch – Angenommen die Kräfte seien einander gleich, dann muss die Mittelkraft eine Function des halben eingeschlossenen Winkels $2x$ sein; sie muss ausserdem jeder der beiden Kräfte proportional sein; – denn wäre sie einer anderen Potenz derselben proportional, so müsste sie sich ändern, wenn man die Einheit verändern würde, was unmöglich ist. – Wir können dabei schreiben



$$R = P f(x)$$

Nehmen wir nun vier gleiche Kräfte P an, wie sie uns die Figur zeigt, so können wir das Lemma, dass die Mittelkraft zwischen zwei gleichen Kräften den Winkel zwischen diesen halbiren muss, folgendermassen benützen. – Wir bilden den Ausdruck für die Gesammtresultante der 4 Kräfte auf zwei Wegen, und müssen dabei gleiche Resultate erhalten – dies liefert uns eine Gleichung. – Erstens bilden wir die Resultante der P-s die mit (1) und (2) bezeichnet sind, diese ist

$$R_2 = P f(y)$$

und die von den P-s (3) und (4), diese ist,

$$R_3 = P f(y)$$

Diese beiden gleichen Kräfte R_2 und R_3 bilden den Winkel $2x$ mit einander, folglich ist

$$R = P f(y) f(x)$$

Zweitens können wir aber erst die Resultante von (1) und (3), ~~bilden~~, und die von (2) und (4) bilden, diese sind:

$$P f(x-y) \quad \text{und} \quad P f(x+y)$$

Da sie aber in derselben Richtung wirken, so folgt:

$$R = P\{f(x+y) + f(x-y)\}$$

So erhalten wir die Gleichung:

$$f(x) f(y) = f(x+y) + f(x-y)$$

Wir können nun annehmen dass f eine stetige Function ist, so muss sie auch die Eigenschaft haben, dass $(f(x-y) = f(y-x))$ wenn wir nun die obige Gleichung differentiiren so erhalten wir:

$$f'(x) \cdot f(y) = f'(x+y) + f'(x-y)$$
$$f(x) \cdot f'(y) = f'(x+y) + f'(x-y)$$
$$f''(x) \cdot f(y) = f''(x+y) + f''(x-y)$$
$$f(x) \cdot f''(y) = f''(x+y) + f''(x-y)$$

und aus den beiden letzten dieser Gleichungen folgt:

$$f''x\, fy - fx\, f''y = 0$$

oder

$$\frac{f''x}{f''y} = \frac{fx}{fy} = a \text{ eine Constante}$$

daraus ergiebt die Integration:

$$f(x) = A\cos\sqrt{a}x + B\sin\sqrt{a}x$$

Hierin muss $B=0$ sein, weil sonst nicht $f(x)=f(-x)$ sein könnte, also wird:

$$f(x) = A\cos\sqrt{a}x$$

Worin die Constanten A und $\sqrt{a}$ zu bestimmen sind. Dazu wählen wir zwei bekannte specielle Fälle: ist $x=\frac{\pi}{2}$ so wird die Mittelkraft $=0$, es muss also $\sqrt{a}=1, 3$, oder $2m+1$ sein. – Da aber ~~wenn die Kraft~~ wenn der Ausdruck der Resultante dieselbe ~~denselben~~ vorzeichen ~~identisch~~ behalten soll, dann die Mittelkraft mit einer der Kräfte einen Winkel bilden muss der zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt, so kann ~~nur~~ $\sqrt{a}$ nur $=1$ sein. – Ist aber $x=0$, so wissen wir, dass die Mittelkraft $=2P$ wird, also dass $f(0)=2$ ist, d. h. da $\cos(0)=1$ ist, so muss $A=2$ sein; wir haben also:

$$f(x) = 2\cos x$$

Und von hieraus weitergehend kann man ebenso wie im vorigen Beweise, auf die Allgemeingültigkeit weiter schliessen. —

Dynamischer Beweis des Kräfteparallelogramms. Einige Begriffe.

All diese statischen Beweise des Principes des Kräfteparallelogramms sind mehr oder weniger ~~gekün~~ complicirt und gekünstelt, während die des Hebelgesetzes äusserst einfach waren. – Der Grund davon liegt, wie wir bereits erwähnten liegt darin, dass das Princip des Kräfteparallelogramms ein dynamisches und nicht wie das des Hebels ein statisches ist. – Daher ist der Unterschied auch darin begründet, dass hier die Kräfte nicht durch Gewichte zu messen sind, was beim Hebel der Fall war. – Dieselbe geschieht hier durch die Messung der Bewegung die von ihnen erzeugt wird, wenn sie auf einen materiellen Punkt wirken. –

Eine Bewegung erzeugende Kraft hat 4 Modi, 4 nothwendig mit ihr zusammenhängende Begriffe: Angriffspunkt, Intensität, Richtung, Dauer. – Die letzte hebt Rühelot im Gegensatz zu Kirchhoff besonders hervor. – Wenn nemlich eine Kraft zu wirken aufhört, so erzeugt sie weiter keine neue Bewegung, und es setzt sich nur die bis dahin erzeugte Bewegung unverändert fort. – Wirkt aber eine Kraft dauernd so erzeugt sie eine andere Gattung von Bewegung, man nennt diese Kraft die beschleunigende, während man einzelne, ~~die erster Gatt.~~ Kräfte die aufgehört haben zu wirken instantane Kräfte nennen. – Ostrogazki giebt in seinen schönen Arbeiten über Mechanische Prinzipien auch Veranlassung, Nachdruck auf die Dauer der Kraft zu legen. –

Dadurch dass wir ~~den Weg messen~~ diese Kräfte durch den Weg messen, den das von ihnen getriebene Theilchen in der Zeiteinheit zurücklegt, sind wir allein im Stande, die untereinander zu vergleichen. – In dem Falle der gleichförmigen Bewegung, wo die Kraft zu wirken aufgehört hat, sind diese Wege in allen Zeit~~en~~einheiten, mögen sie von einem beliebigen Zeitpunkte an gerechnet werden, gleich. – Im anderen Falle der ungleichförmigen Bewegung, kann man aber die Kraft nur dadurch messen, dass wir den geradlinigen Weg bestimmen, den das Mobil zurücklegen würde, wenn die Kraft allein in der Zeiteinheit gewirkt hätte. –

Wenn mehrere Kräfte auf einen ~~freien~~ materiellen Punkt wirken, so ~~bringt~~ wirkt jede so auf ihn, bringt für sich denselben Wegzuwachs hervor, als wirke sie allein. – (Unabhängige Wirkung der Kräfte auf einen materiellen Punkt). – Wir müssen aber hervorheben, dass hiebei die Kräfte ja nicht nacheinander, sondern alle gleichzeitig wirksam gedacht werden müssen – denn möchte man dies nicht thun, so würde man bei nicht völlig freien Punkten, so zum Beispiel bei einem auf eine Oberfläche gelegten Punkte, auf höchst merkwürdige Zweifel kommen. – Es wäre zum Beispiel so durch Anwendung der Kräfte in passender Reihenfolge

den auf eine Oberfläche gelegten Punkt direct von dem fort bewegen zu können u.s.w.
Das Parallelogramm der Kräfte ist eine unmittelbare Folge dieses Prinzipes, indem man nur die beiden geometrisch dargestellten Bewegungen zusammenzusetzen braucht. – Denn wenn wir dasselbe Resultat durch zwei verschiedene Ursachen erreicht sehen, so halten wir uns berechtigt auf die gleiche Wirkung der beiden Ursachen zu schliessen. –
Doch gehen wir näher auf den Beweis ein. –
Der Weg muss eine Function der Zeit sein z. B. ct, oder $\frac{1}{2}gt^2$ oder allgemein $f(t)$. – Wir können daher auch die ~~kräfte~~ Kraft als eine solche Function annehmen, und daher sagen, es seien 3 Kräfte $a\,ft$, $b\,ft$, $c\,ft$ gegeben, worin a, b, c von der Zeit unabhängige Grössen bedeuten. – (Man könnte auch alle drei gleich 1 annehmen, und dann durch Zusammensetzung, wie früher zum allgemeinen Fall übergehen). – Diese 3 Kräfte sollen senkrecht ~~auf~~ gegen einander auf einen materiellen Punkt wirken, und jede für sich den Weg resp. x, y, z hervorbringen. – Da der Weg der Kraft proportional ist, so sehen wir, dass der materielle Punkt sich in einer geraden Linie bewegen muss, da

$$x : y : z = a : b : c$$

ist; dieselbe geht durch den Anfangspunkt der Bewegung, und ihre Richtungsdeterminanten sind:

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

und ihre Länge

$$= \sqrt{a^2+b^2+c^2}\, ft$$

Der Punkt wird also dieselbe Gattung von Bewegung erhalten, da der Weg auch dem ft proportional ist. – Da also durch die drei Kräfte derselbe Weg erzeugt wird, wie durch $\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,ft$, so ist damit das Kräfteparallelogramm als richtig erkannt. –
Wenn die Kräfte nicht senkrecht aufeinander wirken,

so verfahren wir auf folgende Art:
Zwei Wege seien durch ihre Richtungsdeterminanten resp. $\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1$ und $\cos\alpha_2, \cos\beta_2, \cos\gamma_2$ bestimmt; es müssen dann für diese beiden Richtungen auch zwei Ursachen vorhanden sein. – Diese Ursachen (Kräfte) nennen wir $f_1 t$ und $f_2 t$, so dass die auf den drei Coordinatenaxen entstehenden Bewegungen sind:

$$f_1\cos\alpha_1 + f_2\cos\alpha_2 \quad , \quad f_1\cos\beta_1 + f_2\cos\beta_2 \quad , \quad f_1\cos\gamma_1 + f_2\cos\gamma_2$$

Bezeichnen wir nun die Richtung der durch beide Ursachen zusammen erzeugten Bewegung, durch ihre Determinanten $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, und die Ursache, die eine solche Wirkung hervorgebracht haben würde mit ft, so müssen folgende Gleichungen bestehen:

$$f\cos\alpha = f_1\cos\alpha_1 + f_2\cos\alpha_2$$
$$f\cos\beta = f_1\cos\beta_1 + f_2\cos\beta_2$$
$$f\cos\gamma = f_1\cos\gamma_1 + f_2\cos\gamma_2$$

Das bedeutet aber nichts anderes, als dass f die Diagonale eines Parallelogramms aus f_1 und f_2, der Richtung und Länge nach ist, denn wenn man das Dreieck f, f_1, f_2, durch senkrechte durch die Ecken gelegte Ebenen, auf die Axen projiciren würde, so würde man zu jenen drei Gleichungen gelangen. – Hieraus folgt auch unmittelbar das Polygon der Kräfte: man setze alle Kräfte der Reihe nach zu einem Polygon zusammen, so ist die letzte Seite die Mittelkraft aller übrigen der Richtung und Länge nach. –
Erhebt die hier angeführten Gleichungen beiderseitig auf Quadrat, und addirt sie, so erhält man auch durch Rechnung die Intensität der Mittelkraft; nämlich!

$$f^2 = f_1^2 + 2 f_1 f_2 \cos(f_1, f_2) + f_2^2$$

oder allgemein:

$$f^2 = \sum \left\{ f_n^2 + 2 f_n f_{n'} \cos(f_n, f_{n'}) + f_{n'}^2 \right\}$$

Die Richtung der resultirenden Kraft erhält man dadurch, dass man die Gleichungen durch einander dividirt. –
Bemerkung. Wir hätten in der letzten Betrachtung eigentlich die Kraft nicht in der allgemeinen Form $= a f(t)$ annehmen sollen, sondern $= at$, oder $= \frac{a}{2} t^2$

und hätten dann resp. die Zerlegung der Geschwindigkeit, oder die Zerlegung in Constante Kräfte gewonnen.

7 Mai. 869. Schätzung der Kräfte. Grundbegriffe der Dynamik.

Wir wollen uns nun mit der Schätzung der Kraft beschäftigen, und damit gleich die Grundlage zur Dynamik legen. –

Es giebt in der Natur zwei Arten der einfachsten Bewegung, beide absolut darzustellen ist unmöglich, weil stets eine Menge hindernder Nebenkräfte vorhanden ist – diese beiden Grundbewegungen sind: die gleichförmige Bewegung, dargestellt durch die Gleichung $s = at$, und die gleichmässig beschleunigte auftretend bei dem freien Fall, dargestellt durch die Gleichung $s = \frac{g}{2} t^2$.

Von diesen beiden Bewegungen wollen wir ausgehen, die auf dem Prinzipe von Lagrange basirend. Die Ursachen diese beiden Bewegungsarten haben gewisse Eigenschaften. – Die erste Art der Bewegung ist die Folge eines Stosses der in derselben Richtung als die Bewegung geschieht erfolgte, bei dem die Kraft im Momente der Wirkung zu wirken aufhört. – Die zweite Bewegungsart lässt sich in ihren Resultaten durch die Atwood-sche Fallmaschine darstellen, woraus sich ergiebt, dass die Ursache der Bewegung den bewegten Körper auch während seiner Bewegung begleitet. – Auch hier ist man veranlasst anzunehmen, dass die Kraft in der Richtung der Bewegung wirkt, und dass ihre Dauer eine ihrer wesentlichen Eigenschaften ist. –

Die Ursachen der Bewegung können wir nicht bis in ihre ersten Prinzipien verfolgen, und müssen uns daher begnügen die Kräfte zu messen und zu schätzen. – Als Maass der Kraft dient der durch den von ihr bewegten Punkt in der Zeiteinheit zurückgelegte Weg. – Rechnen wir bei der ersten Art der Bewegung den Weg von $t=0$ an, so finden wir den in der ersten Zeiteinheit durchlaufenen Weg $= a$, und durch dieses a wird die Ursache der Bewegung gemessen, da er in jeder folgenden Zeiteinheit derselbe bleibt: man nennt dieses a die Geschwindigkeit, es ist also die Kraft durch die Geschwindigkeit ersetzt. –

Im zweiten Falle der Bewegung ist der in der Zeiteinheit durchlaufene Weg $\frac{1}{2}g(t+1)^2 - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g(2t+1)$ also mit der Zeit veränderlich. – Um ein Maass für die Kraft zu haben könnte man diesen Wegzuwachs nehmen; derselbe ist in einer Zeiteinheit:

$$\frac{1}{2}g(2(t+1)+1) - \frac{1}{2}g(2t+1) = g$$

Wie man auch bei anderen Bewegungen Geschwindigkeit und Kraft definiren kann, wird die folgende Betrachtung zeigen. – Wir müssen diese Begriffe auch in anderen Fällen durch den Wegunterschied bestimmen, nur nicht zur Zeit t und $t+1$ sondern zur Zeit t und $t+\tau$. – Wenn das Gesetz der Bewegung gegeben ist durch die Gleichung $s = f(t)$ so wird der Wegunterschied zur Zeit $t+\tau$ und zur Zeit t sein:

$$\Delta s = \tau f't + \frac{\tau^2}{1.2} f''t + etc.$$

wobei nur die Annahme gemacht ist, dass die Bewegung stetig ist. – Dazu sind wir aber berechtigt; denn es steht fest (nach Riemanns Ausspruch), dass es eine Function nicht geben kann, die an jedem discreten Punkte unstätig ist, wir brauchen daher bei $f(t)$ nur den stetigen Theil zu betrachten, der nicht blos punktuell ist. – Es giebt nun keine gleichförmige Bewegung, die der eben angegebenen näher käme, als die durch die Gleichung $s = at$, worin $a = f't$ ist bestimmte; denn für diese wird:

$$Ds = \tau a$$

mithin $$\Delta s - Ds = (f't - a)\tau + \frac{\tau^2}{1.2} f''t + etc.$$

oder weil $a = f't$ ist

$$\Delta s - Ds = \frac{\tau^2}{1.2} f''t$$

so dass diese beiden Bewegungen bis auf die 2te Ordnung von τ, das man beliebig klein machen kann, übereinstimmen, während für zwei Bewegungen $s = at$ und $s = a't$, wo a und a' verschieden sind, $\Delta s - Ds$ von der Ordnung τ also grösser ist. –

Ferner kann keine gleichförmig beschleunigte Bewegung existiren, die der oben definirten Bewegung so nahe kommt, als diejenige welche bestimmt ist durch die Gleichung $s = at + \frac{g}{2}t^2$ wo $a+g = f't$ und $g = f''t$ ist; denn nur in diesem Falle wird $\Delta s - Ds$ von der 3ten Ordnung in Bezug auf τ, in allen übrigen von einer niedrigeren Ordnung. –

Man beachtet keine solche einfach messbare Bewegung in der Natur die auf die 3ten Differentialquotienten führte; wäre dies so, so könnte man auch die 3ten, 4ten etc. Differentialquotienten in die Mechanik einführen, wie jetzt die beiden ersten Diff. Quotienten eingeführt sind; Durch diese (Geschwindigkeit und Kraft) kann man alle Bewegung erklären, und wenigstens annäherungsweise berechnen, indem man die aufgestellten Diff. Gleichungen annäherungsweise zu integriren im Stande ist. – Man nennt also $f't$ die Geschwindigkeit, $f''t$ die Kraft die während der Bewegung $s = f(t)$ gewirkt haben. – Weil also die Kraft der Differentialquotient der Geschwindigkeit ist, so folgt dass die Kraft ~~und~~ der Zuwachs der Geschwindigkeit in der Zeiteinheit ist (Beschleunigung); die Geschwindigkeit ist der Weg den das Mobil in der nächsten Zeiteinheit durchlaufen würde, wenn plötzlich alle früheren Ursachen der Bewegung aufhören würden; die Beschleunigung ist derjenige in der Zeiteinheit erlangte Zuwachs der Geschwindigkeit, den das Mobil in der Zeiteinheit erreichen würde, wenn plötzlich die Kraft constant werden würde. –

Diese beiden Grössen, Kraft und Geschwindigkeit, haben noch gewisse Eigenschaften, die der Prinzipien halber, festgestellt werden müssen; wir finden sie durch Anwendung der Eigenschaften der Differentialquotienten. –

Zwischen dem ~~kleinsten~~ grössten und kleinsten Werth des Differentialquotienten in einem Intervalle τ liegt immer der Ausdruck: $\frac{f(t+\tau)-f(t)}{\tau}$. – Es ist nehmlich $ft = \int f't\,dt$ also $\frac{1}{\tau}(f(t+\tau)-f(t)) = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} f't\,dt$ und dieser offenbar kleiner als der grösste und grösser als der kleinste Werth von $f't$, da es ja ein Mittelwerth ist. – Ebenso lässt es sich geometrisch einsehen, dass: die durch das Integral ausgedrückte ~~a~~ Fläche liegt zwischen τ-mal dem Maximum und τ-mal dem Minimum der Ordinaten $f't$. –

Also muss auch die Geschwindigkeit die Eigenschaft haben, dass in jedem Zeitintervalle ~~das~~ das Verhältniss des in dem Zeitintervalle erlangten Wegzuwachses, zu dem ~~Weg~~ Zeitzuwachse zwischen ihrem kleinsten und grössten Werthe liegt. –

Dasselbe lässt ~~sich~~ unmittelbar auch auf die Beschleunigung ausdehnen, und würde dann lauten: Die Beschleunigung besitzt die Eigenschaft, dass in jedem Zeitintervalle ~~dass~~, der in dem Zeitintervalle erlangte Geschwindigkeitszuwachs dividirt durch den Zeitzuwachs, zwischen ihrem grössten und kleinsten Werth in diesem Intervalle liegt. –

Dieser Satz lässt sich auch umkehren. –

Wenn eine Function Ft die Eigenschaft hat, dass zwischen ihrem grössten und kleinsten Werth in einem <u>gehörig kleinen</u> Zeitintervall der Ausdruck $\frac{f(t+\tau)-f(t)}{\tau}$ liegt, so muss Ft der Differentialquotient $f't$, ~~der~~ Function ft, sein. –

Dieser Satz ist zuerst von Ampère ausgesprochen, er wird überall gebraucht, wo stetig sich ändernde Naturkräfte in mathematische Rechnung zu bringen sind. –

Um den Satz zu beweisen, d. h. um nachzuweisen, dass, wenn die Gleichung:

$$\text{Minim. } Ft < \frac{f(t+\tau)-ft}{\tau} < \text{maxim. } Ft$$

gilt, $Ft = f't$ sein muss, nehmen wir das Gegentheil an: Ft sei nicht der Differentialquotient, sondern $Ft = f't + \varphi t$. – Nach dem gefundenen Satze muss:

$$\tau.\ \text{Min } Ft < \int_t^{t+\tau} Ft\,dt < \tau \text{ Max } Ft$$

sein; hierin setzen wir für das Integral den angenommenen Werth

$$\tau \text{ Min } Ft < \int_t^{t+\tau} f't\,dt + \int_t^{t+\tau} \varphi t\,dt < \tau \max Ft$$

also auch:

$$\tau \text{ Minim. } Ft < f(t+\tau) - f t + \tau \psi(t+\partial\tau) < \tau \text{ Max. } Ft.$$

Da nun ausserdem:

$$\tau \text{ Minim. } Ft < f(t+\tau) - f t < \tau \text{ max. } Ft$$

ist, so muss, wenn man die Ungleichungen von einander abzieht:

$$-\tau(\text{Max } Ft - \text{Min. } Ft) = \tau \psi(t+\partial\tau)$$

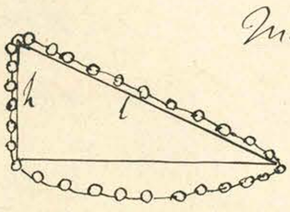
$$\text{Max } Ft - \text{Min } Ft = -\psi(t+\partial\tau)$$

Da man nun τ so klein annehmen kann, dass die Differenz Max Ft − Min Ft beliebig klein wird, so kann man ψ stets kleiner als eine vorher angenommene Grösse machen d.h. ψ muss gleich null sein, und es wird also wirklich

$$Ft = f't$$

Sprechen wir den soeben bewiesenen Satz dynamisch aus, so lautet er:
Wenn bei einer sich ändernden Ursache der Bewegung, der in der Zeiteinheit durchlaufene Weg grösser ist als der den das Mobil mit der kleinsten aller Geschwindigkeiten durchläuft, und kleiner als der den sie mit der grösten aller Geschwindigkeiten durchläuft, so muss die Geschwindigkeit der Differentialquotient der Bewegung sein, falls die Geschwindigkeit wie oben definirt ist. – Ebenso lässt sich der Satz auch für die Beschleunigung aussprechen. –
Damit verlassen wir diese dynamischen Grundprinzipien, und kehren zur Statik zurück, um die noch übrigen Prinzipien derselben zu behandeln. –

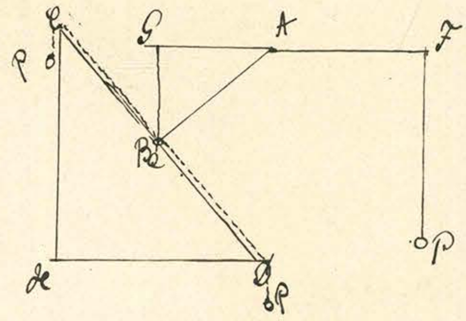
Das Prinzip der schiefen Ebene.



Man kann sich das Prinzip der schiefen Ebene folgendermassen klar machen, auf der schiefen Ebene hänge eine Kette von gleichen, durch mathematische Linien verbundenen, gleich weit von einander entfernten Kugeln. – Diese Kette muss offenbar im Gleichgewicht stehen, denn wenn dies nicht wäre, so hätten wir ein perpetuum mobile. Daraus folgt aber unmittelbar das Gesetz der schiefen Ebene; es wirken P Gewichte senkrecht und Q Gewichte schräge, also ist:

$$\frac{P}{Q} = \frac{h}{l}$$

Die Frage wie dieses Prinzip aus dem Hebelgesetz abzuleiten sei, ist zuerst von Galilei, etwa in folgender Art gelöst worden. – Wir denken uns in B ein Gewicht Q, dem durch P das Gleichgewicht gehalten wird; wir errichten in B ein Perpendikel auf CD, ziehen durch sie Horizontale, so dass die Verticale GB dem Gewicht von Q entspricht, dann machen wir AF = AB und lassen in F und B nach unten in den angedeuteten Richtungen die Kraft P wirken, wodurch sich nichts ändert, da nur gleiche Kräfte an den gleichen Armen AF und AB des Winkelhebels wirken. – Nun heben sich die beiden in B wirkenden Kräfte P auf, da sie gleich und entgegengesetzt sind, und es halten sich die in G und F am Hebel GAF wirkenden Kräfte Q und P das Gleichgewicht. – Nach dem Hebelgesetze verhalten sich diese wie:



$$P : Q = AG : AF$$

Oder da $AF = AB$ gemacht ist

$$\frac{P}{Q} = \frac{AG}{AB}$$

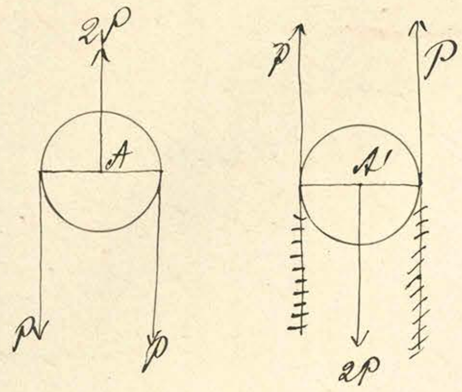
Nun ist aber $\frac{AG}{AB} = \frac{CH}{CD} = \frac{h}{l}$; also finden wir das Gesetz der schiefen Ebene:

$$\frac{P}{Q} = \frac{h}{l}$$

Roverbal hat das Gesetz für schief wirkende Kräfte abgeleitet, dann kommt man auf das Parallelogramm der Kräfte. –

Auf das Prinzip der losen Rolle hat Lagrange das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten begründet. – Wir abstrahiren bei der Ableitung desselben wieder von Reibung und allen anderen Nebenkräften. – Wir nehmen zuerst die Axe der Rolle A fest an und lassen an beiden Seiten derselben gleiche Ge- Prinzip der losen Rolle.

wichte P wirken, dann wird Gleichgewicht vorhanden sein. – Ist A nicht fest, so muss daselbst eine Kraft 2P nach oben wirken um das Gleichgewicht herzustellen. – Dreht diese Rolle um so erhält man die lose Rolle an deren Axe die Kraft 2P nach unten wirkt, und an deren beiden Seiten die



Kraft P nach oben wirkt, wenn Gleichgewicht vorhanden sein soll. – Man nennt die nach oben und nach unten wirkende Kraft, die in jedem Punkte der Schnur wirksame Spannung; auf die Länge der Schnur kommt es dabei nicht an. –

Diese Vorrichtung dient dazu Kräfte in einem oder mehreren Punkten, von bestimmter Größe und Richtung, durch aufgehängte Gewichte zu erzeugen. – Es soll eine ~~Gewicht~~ Kraft nP durch das Gewicht $\frac{P}{2}$ in senkrechter Richtung erzeugt werden. – Man nehme an einer Axe ein System von n festen, an einer andern Axe ein System von n losen Rollen, die man mit Umlegung einer Schnur mit einander verbindet; das eine Ende der Schnur wird befestigt, an dem andern losen das Gewicht $\frac{P}{2}$ angehängt: dann wirkt an der Axe der losen Rollen das Gewicht nP, wie aus der wiederholten Anwendung des Prinzips unmittelbar klar wird; Will man dem Gewicht nP eine andere Richtung geben, so führe man die an der losen Axe befestigte Schnur die das Gewicht nP trägt, noch um eine feste Rolle, so dass die Schnur die gewünschte Richtung erhält. – Sollen die Kräfte n_1P und n_2P an zwei Punkten resp. A_1 und A_2 wirken, und von der Kraft $\frac{P}{2}$ erzeugt werden, so nehme man je zwei solcher Systeme wie oben, von resp. n_1 und n_2 festen und losen Rollen, verbinde zuerst die n_1 Rollen unter sich durch eine Schnur, an deren einem Ende das Gewicht $\frac{P}{2}$ angehängt, und deren anderes Ende weiter um das zweite System von Rollen $(2n_2)$ geführt wird; dann wird das Ende befestigt. – Um den Kräften $n_1 P$ und $n_2 P$ ~~wird~~ gewisse Richtungen zu geben, wendet man wieder je eine feste Rolle an, wie oben. – Es trägt hier jedes der Schnüren die Last $\frac{P}{2}$ und da bei dem ersten Systeme $2n_1$, bei dem zweiten $2n_2$ solcher Schnüre sind, tragen sie die verlangten Gewichte $n_1 P$ und $n_2 P$. – Ebenso lässt sich dies auf eine beliebige Anzahl von Punkten ausdehnen. – Weil man solche Verbindungen von festen und losen Rollen Flaschenzüge nennt, führt auch das Prinzip diesen Namen. –

Figur 2.

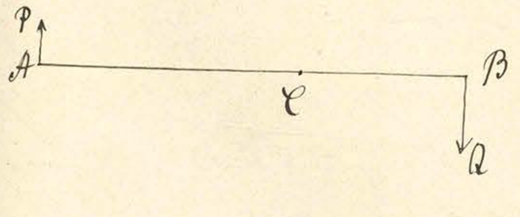
Wie aus diesem Prinzipe die Anderen abzuleiten sind brauchen wir nicht zu untersuchen, da wir es wie alle anderen dieser Prinzipien auf das Prinzip des Hebels zurückgeführt haben. –

Prinzip der Kräftepaare

Das Prinzip der Kräftepaare verdient eigentlich den Namen eines Prinzips nicht, da es nur einen Ausnahmsfall bildet – da wir später nochmals auf dasselbe zurückkehren werden, können wir es hier nur kurz behandeln. –

Wenn zwei gleiche entgegengesetzte parallele Kräfte auf ein festes System von Punkten z. B. auf eine mathematische Linie wirken, so findet kein Gleichgewicht statt, weil der Unterstützungspunkt für die Angriffspunkte solcher Kräfte unendlich weit entfernt sein müsste, denn es ist:

$$\frac{P}{-Q} = \frac{CB}{CA}$$



also auch

$$\frac{P}{Q-P} = \frac{CB}{CA+CB} \; ; \; \frac{P}{P-Q}$$

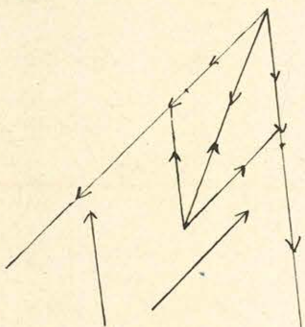
Wenn also $P = Q$ wird, so muss $CB = \infty$ werden, d. h. C unendlich entfernt sein. – Dieser Ausnahmsfall ist aber in der Mechanik von Wichtigkeit da er häufig zur Anwendung kommt (z. B. bei Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen für ein starres System). –

Wir wollen hier einige Definitionen angeben, die beim Kräftepaar auftreten. – Man nennt Ebene des Paares die Ebene in der die Kräfte wirken. –

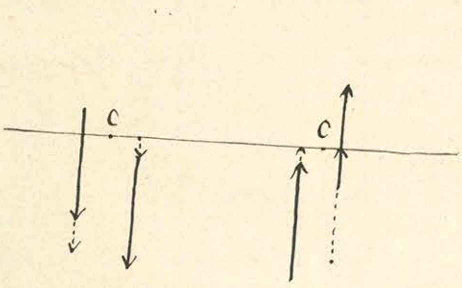
Sinn des Paares die Richtung der Wirkung bestimmt für einen Beobachter, der auf der Ebene des Paares zwischen den Kräften steht; das Product von Kraft und Breite heisst das Moment des Paares; Die Axe des Paares heisst das auf der Ebene derselben errichtete Perpendikel, für welches der Sinn positiv ist.–

Hienach werden folgende Sätze über Kräftepaare verständlich werden:

2 Kräftepaare in derselben Ebene, die einander gleich aber entgegengesetzt sind halten sich das Gleichgewicht.



Es können hier zwei Fälle eintreten: entweder die 4 Kräfte bilden einen Rhombus oder sie sind alle einander parallel. – Im ersten Falle kann man die Kräfte durch Verschieben in ihrer Richtung in die Ecken des Rhombus bringen, und zwar so dass die beiden positiven in einer, die beiden negativen in der gegenüberliegenden Ecke zusammenstossen; nimmt man von ihnen die Resultanten, so sind dieselben gleich aber entgegengesetzt, heben sich also auf. – Im zweiten Falle



legt man durch alle 4 eine Gerade senkrecht durch, und kann dann das System als aus zwei Hebeln bestehend ansehen, die beide im Gleichgewichte stehen. – Wir haben also diese beiden Fälle auf das Parallelogramm der Kräfte und den Hebel zurückgeführt, man kann umgekehrt auch beide aus diesem ableiten. Wir knüpfen hieran noch einige Sätze, ohne ihren Beweis an.–

Ein Kräftepaar kann in seiner Ebene beliebig verlegt werden, es hat immer dieselbe Wirkung.

Kräftepaare in derselben oder in parallelen Ebenen sind gleichwirkend, wenn sie dieselben Momente

haben. –
2 Kräftepaare ~~[illegible]~~ in derselben Ebene lassen sich zu einem zusammensetzen, dessen Moment die Summe oder Differenz der einzelnen Momente ist, je nachdem sie gleichen oder entgegengesetzten Sinn haben. –
2 Kräftepaare in 2 sich schneidenden Ebenen sind mit einem dritten gleichwirkend, dessen Axe die Diagonale der in einem beliebigen Punkte zusammengesetzten Axen ist; die Axe ist auf der oben angegebenen Seite zu nehmen. – Darauf ist die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräftepaare basirt. –

<u>Erklärung des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeit</u>

Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit wollen wir zuerst allgemein erklären, dann in speciellen Fällen als richtig erkennen, je allgemeiner dann diese speciellen Fälle sind, je mehr sie mit einem System von beliebig vielen Kräften ~~zusammenfallen~~ übereinstimmen, die an Angriffspunkten wirken, die beliebigen Bedingungen unterworfen sind: um so mehr Anspruch hat dann der Nachweis der Richtigkeit in einem spec. Falle auf den Namen eines Beweises, obwohl er noch immer keiner ist. – Einen solchen werden wir endlich führen, indem wir aus den Axiomen und Principien die Richtigkeit des Prinzips direct und unumstösslich darthun werden. – Als Beweise sind aus den angegebenen Gründen jene Nachweise des Prinzips die von Ubaldi mittels des Hebels, von Lagrange mittels des Flaschenzugs, von Fourier mittels eines Systems von Hebeln geführt sind, nicht zu betrachten. – Wir werden unsern Beweis aus dynamischen Principien herleiten, wie er wohl einzig richtig ist. –
Um den Satz zu verstehen müssen wir uns zuerst einige Begriffe klar machen. –
Man denke sich ein System von Körpern oder materiellen Punkten, oder einen Körper mit Angriffspunkten, an denen Kräfte in gegebener Richtung und Intensität wirken mögen. – Wir benutzen dieselben hier nur für einen Zeitmoment, es kann also von Dauer und Aufhören der ~~Kräfte~~ Wirkung keine Rede sein, doch werden wir auch hierauf zurückkommen. –

Dieses betrachtete System möge gewissen geometrischen Bedingungen unterworfen sein, also bei den materiellen Punkten z. B. feste Entfernungen von einander haben, so dass sie eigentlich schon einen Körper mit Angriffspunkten darstellen, oder auf einer Oberfläche zu gehen gezwungen sind, oder auf Oberflächen, oder in sie hineingelegt sind, oder sie mögen zwar nicht über eine gewisse Entfernung hinausgehen können, aber innerhalb derselben sich ganz frei bewegen (wie bei Punkten eines Fadens). – Die an diesem Systeme wirkenden Kräfte sollen sich nun das Gleichgewicht halten und keine Bewegung erzeugen können. – Es können auf das ganze System auch noch andere Kräfte wie die betrachteten wirken, ohne dass unsere Betrachtung dadurch verändert würde. – Denken wir uns nun eine Lage der Punkte, die von der ursprünglichen unendlich wenig verschieden ist; wobei wir aber zwischen Lagen unterscheiden müssen, welche die geometrischen Bedingungen zulassen, oder nicht. –

Jede solche Lage welche den geometrischen Bedingungen nicht widerspricht nennen wir eine virtuelle Lage, die <u>wirkliche</u> Lage welche bei der Bewegung thatsächlich auftritt ist hiervon zu unterscheiden, denn obwohl die wirkliche Lage immer eine virtuelle ist, so ist doch die virtuelle Lage nicht unbedingt eine wirkliche. – Um in diese virtuelle Lage zu gelangen muss ein jeder Punkt einen unendlich kleinen Weg zurücklegen, den wir im folgenden mit $\delta\sigma$ bezeichnen, und „virtuellen Weg" nennen werden. – Bezeichnen wir die Punkte mit $A_1, A_2, \ldots A_n$, ihre Nachbarlagen mit $A_1', A_2' \ldots A_n'$, so werden die virtuellen Wege $\delta\sigma_1, \delta\sigma_2, \ldots \delta\sigma_n$ von den geradlinigen Wegen resp. A_1A_1', $A_2A_2' \ldots A_nA_n'$ nur um Grössen zweiter Ordnung verschieden sein, und können wir deshalb immer diese

für jene in die Rechnung einführen. –
Wenn man nun diese Wege auf die in den einzelnen Punkten wirkenden Kräfte $P_1, P_2, \dots P_n$ projicirt, also:

$$A_hA_h' \cos(A_hA_h', P_h)$$

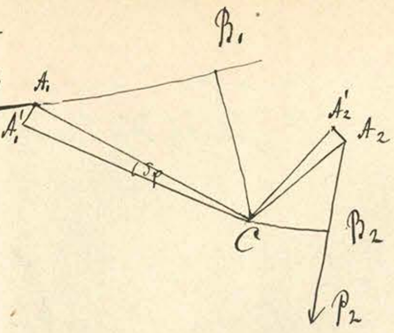
bildet, diese Projection mit der Kraft multiplicirt und dann nach allen Punkten die Summe nimmt

$$\sum A_hA_h' \cdot P_h \cos(A_hA_h', P_h)$$

so muss diese Summe $\leqq 0$ sein, wenn sich das System in Ruhe befinden soll. – (Man kann jene Producte von denen die Summe genommen wurde auch so auffassen, als seien die Kräfte $P_1, P_2, \dots P_n$ auf die virtuellen Wege projicirt und dann mit den Wegen multiplicirt) – und wenn diese Summe $\leqq 0$ ist, so befindet sich das System in Ruhe; wird dagegen die Summe > 0, so tritt Bewegung ein. –
Diese Producte nennt man nun „virtuelle Momente" oder „Arbeit der einzelnen Kräfte auf den betreffenden Wege". – Mit dieser Bezeichnung spricht sich der obige Satz folgendermassen aus: (Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten) Die Summe der virtuellen Momente eines Systems ist $\leqq 0$, wenn das System im Gleichgewicht, > 0, wenn es in Bewegung ist;
Die gesammte virtuelle Arbeit des Systems ist $\leqq 0$ wenn das System in Gleichgewicht, > 0 wenn es in Bewegung ist. –
Dividirt man jedes Glied der Summe durch δt und nennt die Grenze von $\frac{\delta\sigma}{\delta t}$ v', so heisst v' die virtuelle Geschwindigkeit, von der das Prinzip seinen Namen hat; obwohl man diese Darstellung schon seit lange hat fallen lassen. –
Wir wollen nun zuerst die Richtigkeit dieses Satzes an einigen Beispielen erläutern; als solche wählen wir: 1) den Hebel; 2) einen materiellen Punkt auf den Kräfte wirken 3) 2 materielle Punkte an denen Kräfte wirken, 4) ein System von Flaschenzügen 5) ein System von Hebeln. –

36

Nachweis des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten an einem Hebel.



Nachweis an einem Hebel. – Es soll der Allgemeinheit halber ein Winkelhebel sein, und es sollen auf denselben in den Angriffspunkten A_1 und A_2, die Kräfte P_1 und P_2 wirken; sein Unterstützungspunkt sei C, und seine Bewegung vorläufig direct und auch inverse möglich. – Denken wir uns nun denselben in die Nachbarlage $A_1'CA_2'$ gekommen, indem er sich direct um C gedreht hat, und die Punkte A_1 und A_2 resp. bis zu A_1' und A_2' gelangt sind, diese Wege seien δs_1 und δs_2, welche wir den geradlinigen A_1A_1' und A_2A_2' gleichsetzen. – In diesem Falle soll nachgewiesen werden dass:

$$P_1\overline{A_1A_1'}\cos(\overline{A_1A_1'},P) + P_2\overline{A_2A_2'}\cos(\overline{A_2A_2'},P) \leqq 0$$

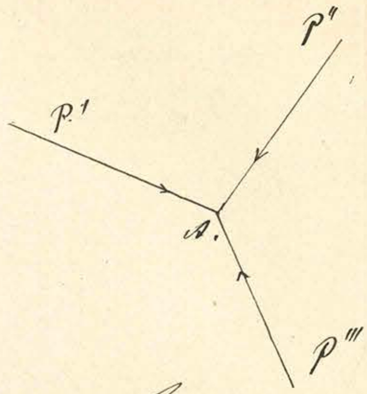
sein soll falls Gleichgewicht vorhanden ist. – Wir wenden das Gesetz des Hebels an. –

Es ist
$$\overline{A_1A_1'} = \delta s_1 = \delta\varphi\, CA_1$$
$$\overline{A_2A_2'} = \delta s_2 = \delta\varphi\, CA_2$$
und da
$$\angle B_1CA_1 = \angle(A_1A_1', P_1) \quad \text{und}$$
$$\angle B_2CA_2 = -\angle(\overline{A_2A_2'}, P) \quad \text{ist}$$
also:
$$CB_1 = CA_1\cos(\overline{A_1A_1'},P) \quad \text{und}$$
$$CB_2 = -CA_2\cos(\overline{A_2A_2'},P)$$
wird, so wird aus $P_1CB_1 - P_2CB_2 = 0$ (Hebelgesetz) indem wir die Werthe einsetzen:

$$\frac{1}{\delta\varphi}\left(P_1\overline{A_1A_1'}\cos(A_1A_1',P) + P_2\overline{A_2A_2'}\cos(A_2A_2',P_2)\right) = 0$$

Also erhalten wir mit Fortlassung des Factors unseren obigen Werth. – Wir wollen nun zusehen in welchem Falle jene Summe < 0 wird. – Wenn der Hebel nur eine directe, keine inverse Drehung erlaubt, indem sich z. B. unter A_2 eine Unterlage befindet, so kann auch die Summe < 0 werden, nach dem Hebelgesetz würde zwar kein Gleichgewicht stattfinden, aber die Drehung könnte nur inverse werden, was nach der Annahme unmöglich sein soll. –

Nachweis in dem Falle eines mat. Punktes auf welchen Kräfte wirken.



Es mögen auf einen Punkt A drei Kräfte wirken (Den Fall wo zwei Kräfte auf den Punkt wirken können wir auslassen, da wir wissen, dass Gleichgewicht in dem Falle nur dann eintritt, wenn die Kräfte gleich und gerade entgegengesetzt sind); da wir den Punkt völlig frei annehmen so kann seine Nachbarlage irgendwo sein; sie sei in A_1. – Wir haben in diesem Falle zu beweisen, dass:

$$P' AA_1 \cos(AA_1, P') + P'' AA_1 \cos(AA_1, P'') + P''' AA_1 \cos(AA_1, P''') \lesseqgtr 0$$

ist, wenn die Kräfte sich im Punkte A das Gleichgewicht halten sollen. – Ziehen wir hier den gleichen Factor AA_1 heraus – (falls $AA_1 = 0$ ist, ist selbstverständlich Gleichgewicht), so erhalten wir: die Summe der Projectionen der Kräfte auf eine beliebige Richtung soll gleich Null sein. – Dass aber dieses wirklich stattfindet erkennt man aus dem Parallelepipedon der Kräfte, indem man eine jede Kraft nach 3 rechtwinkeligen Richtungen zerlegt; dann muss jede der 3 Projectionen für sich verschwinden. – Wir sehen es gilt hier das Zeichen $= 0$. – Wir nehmen nun an der Punkt sei nicht frei sondern er bewege sich auf irgend einer Curve oder Oberfläche. – Wir können uns auf die Betrachtung des letzteren Falles beschränken, da ja dieses auch den ersteren einschliesst. – Um es anschaulich zu machen, dass ihn nicht die zu betrachtenden Kräfte ~~aufs~~ an die Oberfläche fesseln, denken wir uns dass er sich zwischen 2 unendlich nahen parallelen Oberflächen bewege. – In diesem Falle genügen auch schon zwei Kräfte um ~~ihn~~ ihn im Gleichgewicht zu halten. –

Zum Nachweise an diesem Falle haben wir noch ein Princip nöthig, nämlich: soll Gleichgewicht vorhanden sein, so muss die Resultante der wirkenden Kräfte senkrecht auf der Oberfläche stehen. – Denken wir uns die Kräfte nach zwei senkrechten Richtungen, in der Tangentenebene und einer darauf senkrechten (Normalen) Richtung ~~hat~~ liegt, so müssen wir nachweisen, dass die in der Richtung der Normale wirkende Kraft von dem Widerstande der Oberfläche aufgehoben wird, die in der Tangentenebene wirkende aber = 0 sei. Wir denken uns dann in dem Berührungspunkte eine die Oberfläche berührende Kugel, welche mit jener dieselbe Normale haben muss. – Nun hebt aber eine im Mittelpunkt angebrachte, der Normalkraft gleiche und entgegengesetzte Kraft die Normalkraft auf. – Wenn also nur die Kugel fest genug ist, so wird sie der Normalkraft das Gleichgewicht halten; damit ist aber auch bewiesen dass für die Oberfläche dasselbe gilt. – Soll also in unserem Falle Gleichgewicht vorhanden sein, so müssen die Tangentialkräfte 0 sein, also die schliessliche Resultante senkrecht auf die Oberfläche stehen. – Es muss also in der Gleichung:

$$P'\delta s \cos(\delta s P') + P''\delta s \cos(\delta s P'') \cancel{+ P'''\delta s \cos(\delta s P''')} = \delta s R \cdot \cos(R \delta s)$$

$$\cos R, \delta s = 0$$

sein, d. i. es muss die Summe der beiden Glieder = 0 sein. –

Beide Beweise dieses zweiten Falles sind der Art dass sie sich unmittelbar auf n Kräfte übertragen lassen. –

Bemerkung. Die letzte dieser beiden Unterabtheilungen des ~~ersten~~ 2ten Falles lässt sich auf den ersten zurückführen, indem man zu den n wirkenden Kräften noch eine hinzufügt, die Normal auf der Oberfläche ist, und deren Grösse weiter nicht bestimmt zu werden braucht, da sie im Princip keine Veränderung hervorbringt; denn der Winkel den sie mit dem Wege bildet beträgt $\frac{\pi}{2}$, sein Cos. ist also = 0. –

Ist der Punkt nicht gezwungen auf der Oberfläche zu bleiben, also ist er etwa nur auf die Oberfläche gelegt, so giebt es ausserhalb der Tangentenebene auch noch virtuelle Wege und es muss die Bedingung des resultirenden Weges anders lauten. – Ist die Resultante nämlich wieder die Normalkraft, so muss für den Fall, dass sie von innen gegen die Oberfläche wirkt,

$$\sum P_h \delta s \cos(P_h, \delta s) < 0$$

sein, wenn sie nicht $= 0$ ist, weil nämlich dann

$$R \delta s \cos(R, \delta s) \leqq 0$$

sein muss. – Näher können wir den Unterschied zwischen den Zeichen $=$ und $<$ ~~..~~ dadurch definiren, dass wir sagen, wenn der dem virtuellen entgegengesetzte auch virtuell ist, so würde sowohl das Zeichen $>$ als $<$ gelten können, deshalb muss es für diesen Fall $= 0$ sein; ist dagegen der entgegengesetzte nicht virtuell so muss das Zeichen < 0 gelten. –

Ist die Summe grösser als Null so muss Bewegung stattfinden. – Hier ist kein Beweis nöthig, weil hierin der erste Begriff der Bewegung sich ausspricht: wenn nämlich die Summe der Momente positiv ist, so leitet die Resultante, da dann

$$R \delta s \cos(R, \delta s) > 0$$

ist, den Körper von der Oberfläche ab d. h. es ist Bewegung. –

Nachweis des Umgekehrten Satzes für den Hebel.

Wir wollen nun für den Hebel nachholen, was noch übrig blieb; nämlich den Umgekehrten Satz zu beweisen, dass bei der Bewegung das virtuelle Moment immer positiv sein muss. – Wir behalten die selben Bezeichnungen, und haben dann zu beweisen, dass, wenn:

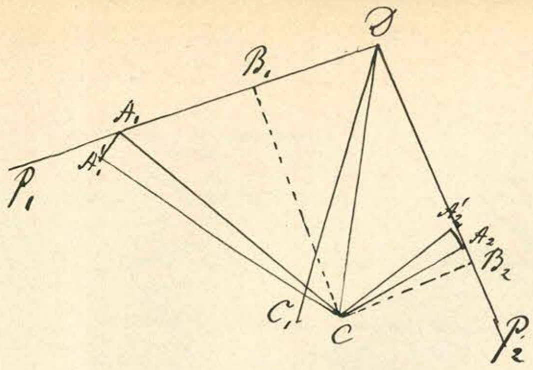
$$P_1 \delta s_1 \cos(P_1 \delta s_1) + P_2 \delta s_2 \cos(P_2 \delta s_2) > 0$$

oder wie wir schreiben können

$$P_1 \delta s_1 \cos(P_1 \delta s_1) > - P_2 \delta s_2 \cos(P_2 \delta s_2)$$

immer Bewegung stattfinden muss. –

Wir nehmen an die Bewegung wäre ~~..~~ direct möglich, wir verlängern P_1 und P_2 rückwärts bis sie sich



in D schneiden, und zerlegen die Kräfte nach D, und wollen nachweisen, dass die Resultante DC_1 zwischen C und A_1 fällt. — Wir bezeichnen CB_1 mit p_1, CB_2 mit p_2, ferner setzen wir $\angle CDB_1 = \alpha_1$, $\angle CDB_2 = \alpha_2$ und $\sphericalangle CDC_1 = \beta$, sodass β immer positiv ist; es ist zu beweisen dass die Resultante immer links von CD liegt, es ist:

$$p_1 = CD \sin\alpha_1 \qquad p_2 = CD \sin\alpha_2 \quad \text{und}$$

$$P_2 = R\,\frac{\sin(\alpha_1 \mp \beta)}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)} \qquad P_1 = R\,\frac{\sin(\alpha_2 \pm \beta)}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}$$

also wird:

$$P_1 \sin(\alpha_1 \mp \beta) = P_2 \sin(\alpha_2 \pm \beta)$$

und weil $P_1 p_1 > P_2 p_2$ sein soll, wie aus der Voraussetzung folgt, so wird auch:

$$P_1 \sin\alpha_1 > P_2 \sin\alpha_2 \quad \text{sein und deshalb}$$

$$\sin\alpha_1 \sin(\alpha_2 \pm \beta) > \sin\alpha_2 \sin(\alpha_1 \mp \beta) \quad \text{oder:}$$

$$\pm \sin\alpha_1 \cos\alpha_2 \sin\beta > \mp \sin\alpha_2 \cos\alpha_1 \sin\beta \quad \text{oder endlich:}$$

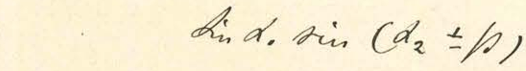
$$\pm \sin(\alpha_1+\alpha_2) \sin\beta > 0$$

Also da $\sin(\alpha_1+\alpha_2)$ und β stets positiv sind, so muss man das obere Zeichen nehmen d. h. β liegt links von DC. —

Beim geradlinigen Hebel können wir den Beweis für die Bewegung unter der Voraussetzung:

$$P_1 \delta s_1 \cos(P_1, \delta s_1) + P_2 \delta s_2 \cos(P_2 \delta s_2) > 0$$

in der Art führen: Aus der Voraussetzung folgt:



$$P_1 \overline{CA_1} > P_2 \overline{CA_2}$$

Bringen wir die Kraft P_1 in A an, wo A so bestimmt wird, dass

$$P_1 \overline{CA} = P_2 \cdot \overline{CA_2} \text{ ist, so wird:}$$

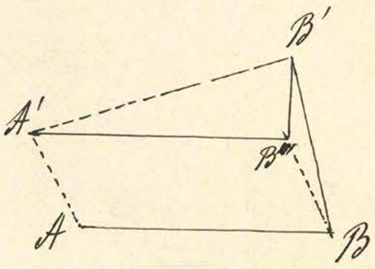
$$CA_1 - CA > 0.$$

Da also die Resultante von P_1 und P_2 in A und A_2 gerade durch C geht, so wird die Resultante von P_1 und P_2, wenn sie in A_1 und A_2 wirken links von

C fallen d. h. es muss Bewegung eintreten.

Dritter Nachweis des Pr. d. v. G. an dem Falle von 2 Punkten auf welche Kräfte wirken.

Es mögen auf 2 Punkte A und B Kräfte in derselben Geraden aber entgegengesetzt wirken. – Die Nachbarlage von AB sei A'B', wir ziehen dann durch A' eine parallele zu AB, die durchaus nicht in der Ebene der Zeichnung zu liegen braucht. – Wir machen nun A'B'' = AB und verbinden B B'' B'. – Geometrische Bedingungen kann es hier 4 verschiedene geben: AB sei constant; es darf nicht grösser; es darf nicht kleiner; es darf kleiner und grösser werden, wovon der 4te Fall nichts als der bereits behandelte Fall eines freien Punktes ist. – Wir brauchen deshalb auch nur die drei ersten Fälle hier zu behandeln. – Wenn wir das Dreieck BB'B'' auf AB projiciren, so erhalten wir die Gleichung:



$$BB'\cos\beta + B'B''\cos\beta' + B''B\cos\beta'' = 0$$

wenn β, β', β'' die resp. Winkel sind, welche diese Linien mit AB bilden. – Hierin ist das mittelste Glied von der zweiten Ordnung, so dass wir es vernachlässigen können und consequenterweise müssen. Es ist nämlich:

$$B'B'' = A'B' \sin B'A'B'' \quad \text{aber } \sin B'A'B'' \text{ von der ersten Ordnung}$$

$\cos\beta'$ unterscheidet sich um $\frac{B'A'B''}{2}$ von 0 ist also auch von der ersten Ordnung; deshalb wird das Product $B'B''\cos\beta'$ von der 2ten Ordnung und wir erhalten

$$1) \qquad BB'\cos\beta + B''B\cos\beta'' = 0$$

Jetzt projiciren wir das Paralleltrapez $AA'BB''$ auf AB und erhalten dann:

$$AA'\cos\alpha + A'B'' + B''B\cos\beta - AB = 0 \quad \text{oder da } A'B'' = A'B'$$

$$A'B' - AB = AA'\cos(P, AA') - BB''\cos(P, BB')$$

Hieraus folgt mit Benutzung der Gleichung (1)

$$A'B' - AB = AA'\cos(P, AA') - BB'\cos(P, BB')$$

d. h. der Unterschied der Längen in beiden Lagen ist gleich der Summe der virtuellen Projectionen; diese Gleichung multipliciren wir noch mit P und finden:

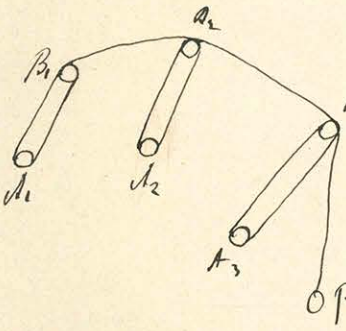
$$P(A'B'-AB) = P\,\overline{AA'}\cos(P,\overline{AA'}) + P\cdot\overline{BB'}\cos(P,\overline{BB'})$$

Ist AB constant d. i. $A'B'=AB$ so haben wir unser Princip nachgewiesen denn es ergiebt sich dann die Summe der virtuellen Momente = 0. – Ist AB veränderlich und bezeichnen wir mit l die Länge AB, mit δl ihre Veränderung, so können wir aus der Gleichung folgende Schlüsse ziehen. Ist $\delta l > 0$ und haben die Kräfte die Tendenz zu vergrössern, oder ist $\delta l < 0$ und haben die Kräfte die Tendenz zu verkleinern d. h. sind die Kräfte gleichartig mit der Bedingung, so ist die Summe der virtuellen Momente positiv; denn im 1ten Falle steht dann links und rechts etwas positives, im 2ten etwas negatives. – Wenn dagegen die Kräfte ungleichartig mit den Bedingungen sind, so ist die Summe der virtuellen Momente kleiner als null. – Ist die Summe positiv, so tritt hier auch wirklich Bewegung ein, denn Punkte und Kräfte streben auseinander. – Im entgegengesetzten Falle streben aber die Kräfte den Punkten entgegen, so dass wirklich Gleichgewicht stattfindet. –

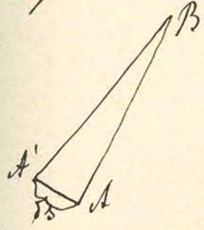
4 Nachweis

Lagrange-s Nachweis des Pr. d. v. G. bei einem Systeme von Flaschenzügen.

Lagrange Nachweis der Richtigkeit des Princips bei einem Systeme von Flaschenzügen. –



Wir nehmen 3 Systeme von festen 3 von losen Rollen an (wie sich zeigen wird lässt sich der Beweis unmittelbar auf n solche Rollen ausdehnen), es seien $A_1\ A_2\ A_3$ die losen, $B_1\ B_2\ B_3$ die festen Rollen, und zwar je $n_1\ n_2\ n_3$ Rollen; am Ende der Schnur wirke das Gewicht P, in A_1, A_2, A_3 in den Richtungen B_1A_1, B_2A_2, B_3A_3 die Gewichte P_1, P_2, P_3 (Es wird $P_1 = 2n_1 P$, $P_2 = 2n_2 P$, $P_3 = 2n_3 P$ sein). – Weil man ein System von Kräften welches irgend welchen geometrischen Bedingungen unterworfen ist, immer durch ein System von Flaschenzügen darstellen kann, so liegt in diesem Beweise etwas verführerisches; doch ist er immer nicht allgemein, und, wie wir sehen werden auch angreifbar. – Wir werden hier genauer zu Werke gehen, wie bei den früheren Beweisen, indem wir auf die Krummlinigkeit der virtuellen Wege Rücksicht nehmen. –



Es sei einer der Punkte in denen die Kraft wirkt A, seine virtuelle Lage sei A'. – Wir unterscheiden hier zwischen dem geradlinigen Wege AA' und dem krummlinigen Wege δs. – Wir betrachten das Dreieck $BA'A$ und wollen darin den Unterschied

$$BA' - BA$$

bestimmen. – Wir setzen $AB = p$ und $\angle BAA' = A$ und finden:

$$BA - BA' = p - \sqrt{p^2 - 2p\,AA'\cos A + \overline{AA'}^2}$$

oder mit Vernachlässigung der Glieder dritter Ordnung:

$$BA' - BA = -AA'\cos A + \frac{1}{2}\frac{\overline{AA'}^2}{p}\sin^2 A$$

Setzen wir $\sphericalangle A'BA = \varepsilon$, so wird:

$$AA' = \sqrt{p^2 - 2p(p+\delta p)\cos\varepsilon + (p+\delta p)^2}$$

oder mit Vernachlässigung der Glieder 3ter Ordnung:

$$AA' = \sqrt{4p^2\varepsilon + (\delta p)^2}$$

oder, weil p eine Function von ε ist ($p = f\varepsilon$), so wird:

$$AA' = \varepsilon\sqrt{4(f\varepsilon)^2 + (f'\varepsilon)^2}$$

Bestimmt aber die Länge des Bogens δs, so wird auch

$$(1 - m\varepsilon)\,\delta s = \varepsilon\sqrt{4(f\varepsilon)^2 + (f'\varepsilon)^2}$$ also wird:

$$AA' = (1 - m\varepsilon)\,\delta s$$

Diesen Werth setzen wir in unsere obige Gleichung ein:

$$BA' - BA = -\delta s\cos(P,\delta s) + \delta s\,.\,m\,\varepsilon\cos(P,\delta s) + \frac{1}{2}\frac{\delta s^2}{p}(1-m\varepsilon)^2\sin^2(P,\delta s)$$

Die beiden letzten Glieder sind von der zweiten Ordnung aber von ganz verschiedenem Charakter, da in dem einen m vorkommt im anderen nicht. – Die Veränderung der Schnur ergiebt sich nun bei n Flaschenzügen, wenn wir die Glieder 2ter Ordnung vernachlässigen:

$$\sum 2P_h(A'_h B_m - A_h B_h) = -2\sum P_h \delta s_h \cos(P_h \delta s_h)$$

Es ist aber klar, dass sich das letzte Ende der Schnur an dem das Gewicht P hängt, um dasselbe Stück aber in entgegengesetzter Weise verändert hat: wir bekommen also die Veränderung der Stellung des Gewichtes P

$$\delta(\overline{B_m P}) = 2\sum P_h \delta s_h \cos(P_h \delta s_h)$$

Zieht man also die Länge $B_m P$ in der Gleichgewichtslage von der Länge in der Nichtgleichgewichtslage ab, so muss diese Differenz < 0 oder $= 0$ sein, wenn Gleichgewicht vorhanden sein soll. – Diese Differenz ist also nichts anderes als $\delta(B_m P)$ und wir haben deshalb

$$2\sum P_h \delta s_h \cos(P_h, \delta s_h) \leqq 0$$

wenn Gleichgewicht vorhanden sein soll. – Wir können den Unterschied der Zeichen $=$ und $<$ hier wieder dadurch definiren, dass wir sagen: wenn der entgegengesetzte Weg eines virtuellen Weges auch virtuell ist, so muss die $\Sigma = 0$ sein, weil sonst diese Summe auch > 0 sein müsste für einen virtuellen Weg, während Gleichgewicht vorhanden ist: das ist aber nicht möglich; ist aber der entgegengesetzte Weg kein virtueller so kann $\Sigma < 0$ sein. –

Dieses ist der Beweis von Lagrange, nur hat er die Ungleichung (< 0) nicht berücksichtigt. –

Wenn der Winkel zwischen einem virtuellen Weg und der Kraft $\frac{\pi}{2}$ beträgt, so verschwinden die betreffenden Glieder da $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ ist.; so kann es kommen dass sämmtliche Glieder, also auch die Summe identisch verschwinden, wenn alle Wege senkrecht auf ihren Kräften stehen. – (Ob das Glied der zweiten Ordnung, welches m enthält auch verschwindet kann man nicht gerade zufolgern).

Die Bedingungen für die Zeichen $\leqq 0$ lassen sich auch folgendermassen darstellen.

Wenn alle geometrischen Bedingungen, welche gegeben werden, durch Gleichungen ausdrückbar sind, so muss das Zeichen = ~~beachtet werden~~ stehen, so bald aber nur eine Ungleichung darunter vorkommt, so kann auch das Zeichen < 0 stehen; denn δs und $\cos(P, \delta s)$ sind jedenfalls von den Coordinaten abhängig, durch welche die Punkte A bestimmt werden. – Haben wir also nur Gleichungen so können wir aus ihnen δs und $\cos(P, \delta s)$, ausdrücken durch die Coordinaten und ihre Variation, und erhalten dann einen in Bezug auf die Variation homogenen Ausdruck 1ter Ordnung. Nun können wir aber, da wir nur Gleichungen haben, für jedes δx δy δz das entgegengesetzte setzen und würden dann den Ausdruck zugleich < 0 und > 0 erhalten; ~~er~~ muss also $= 0$ sein. – Bei Ungleichungen können wir aber nie schliessen, dass für die Variation dieselbe Ungleichung gilt, als für die Werthe: hier kann also auch das Zeichen < 0 gültig sein. – Der Beweis des umgekehrten Satzes den Lagrange gegeben hat ist nicht ganz klar. Er räsonnirt nämlich so: Wenn jene Summe für alle virtuellen Wege $= 0$ ist, so findet jedenfalls Gleichgewicht statt, weil das Gewicht P an derselben Stelle stehen bleiben muss; durch dasselbe werden die äusseren Kräfte nicht geändert: darum folgt dass keine Bewegung eintreten kann, weil kein Grund dazu vorhanden ~~ist~~, dass, wenn die Bewegung stattfindet sie nicht auch nicht stattfinde (??).

Laplace hat deshalb einen andern Beweis gegeben. Betrachten wir zuerst den Fall der Gleichungen. – Wenn Bewegung stattfände, trotzdem dass $\Sigma = 0$ ist, so müsste es Kräfte $Q_1, Q_2, \dots Q_n$ geben, welche an den Punkten A angebracht die Bewegung δs_1 δs_2 ... aufheben. – Diese Kräfte müssten aber mit δs_1, δs_2 etc. stumpfe Winkel bilden, und müssen ausserdem die Eigenschaft haben dass die Summe ihrer aktuellen Momente $Q_1 \delta s_1 \cos(Q_1, \delta s_1)$, das auch virtuell ist, negativ sein, weil jedes Glied derselben negativ ist. – Da nun aber zwischen den Kräften P und Q in jedem

Punkte Gleichgewicht stattfinden soll, so ergiebt sich dass eine Summe von negativen Grössen $= 0$ sein soll. – Dieses ist nur möglich wenn jedes einzelne Glied $= 0$ ist. – Dann muss aber entweder $\delta s_h = 0$ sein, d.h. es findet keine Bewegung statt, oder $Q_h = 0$ sein, dann kann aber ebensowenig Bewegung eintreten, weil eine Bewegung, der ~~an der~~ durch die Kraft 0 das Gleichgewicht gehalten wird, keine Bewegung sein kann: –

Im Falle der Ungleichungen kann man sich auch solche Q-s denken und sie so einrichten, dass sie den P-s das Gleichgewicht halten. – Dann wird jedes Glied der Summe das entgegengesetzte Vorzeichen erhalten, und daher die Summe positiv werden: es müsste also eine positive Grösse gleich einer negativen werden, was unmöglich ist: es kann auch in diesem Falle keine Bewegung stattfinden. –

Was gegen den Beweis von Lagrange einzuwenden ist hat Jacobi meist ausgesprochen, der Beweis ist nämlich nur für das stabile Gleichgewicht, und nicht für das Gleichgewicht im Allgemeinen gültig. – Es kann nämlich ein System von materiellen Punkten wirkenden Kräften verschiedene Gleichgewichtslagen haben; so wird z.B. ein Ellypsoid drei Gleichgewichtslagen haben, je nachdem nämlich eine ihrer drei Axen vertical steht. – Auf der kleinsten Axe hat es stabiles d.i. physisches, auf der mittleren hat es nach einer Seite hin stabiles, nach der andern labiles, auf der grössten nach allen Richtungen labiles Gleichgewicht. – Dieses labile Gleichgewicht ist im Beweise von Lagrange nicht berücksichtigt. – Das Prinzip wird, wenn nur Bedingungsgleichungen gegeben sind, für das labile Gleichgewicht ebenso wie für das stabile bewiesen; sind dagegen auch Ungleichungen gegeben, so müssen wir sagen, entweder ist das ~~keine~~ Prinzip für das labile Gleichgewicht nicht richtig, oder es steckt in dem Lagrange-schen Beweise nicht die Fähigkeit – wegen Vernachlässigung der Glieder 2ter Ordnung, oder weit.

er nicht tiefer auf die Ungleichungen eingegangen ist — das Prinzip als richtig erkennen zu lassen.

5ter Nachweis. Der Fouriersche Beweis des Prinzips d. V. G.

Der Fouriersche Beweis hat diesen Übelstand nicht, er beruht auf dem Hebel, für den das Gleichgewicht genauer bestimmt ist, doch bleibt er immer noch ein Nachweis bei einem bestimmten System – und ist kein allgemeiner Beweis. –

Den Fourierschen Beweis des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten werden wir hier nur in seinen Grundgedanken angeben. – In ihm werden beide Sätze der directe und der indirecte zugleich bewiesen – das ist sein Vorzug. –

Fourier geht davon aus, dass wenn keine Bewegung von den Kräften veranlasst wird, Gleichgewicht stattfindet. – Es sei eine von den vielen möglichen virtuellen Bewegungen $\delta s_1, \delta s_2 \ldots$, wir wollen sie ein déplacement nennen; es kommt dann darauf an ein Hebelsystem zu construiren das nur diese und keine andere Bewegung zulässt, wir denken uns daran δs_1 an A_1, δs_2 an A_2 etc. wirkend. Man denke sich nun durch A_1 eine Ebene senkrecht auf δs_1 und eine durch A_2 senkrecht auf δs_2 etc. gelegt. – Diese beiden Ebenen werden sich im allgemeinen schneiden; auf ihre Schnittlinie fällen wir von A_1 ein Perpendikel a_1; wo dieses Perpendikel die Schnittlinie trifft – es sei der Punkt B_1 – errichten wir in der andern Ebene ein Perpendikel b_1, auf welches wir vom Punkte A_2 ein Perpendikel fällen, das in C_1 schneiden möge; Dadurch entsteht einmal ein Winkelhebel dessen Unterstützungspunkt B_1, und dessen Arme $B_1A_1 = a_1$ und $B_1C_1 = b_1$ sind; dann ein gerader Hebel C_1A_2, der nur in der auf der durch δs_2 senkrecht gelegten Ebene beweglich angenommen wird. – Bei diesem denken wir uns einen Unterstützungspunkt derart angebracht, dass seine Endpunkte gerade die virtuellen Wege δs_1 und δs_2 durchlaufen – dies zu thun ist möglich, da die Wahl dieses Punktes ganz von uns abhängt. – Wenn also A_1 den Weg δs_1 durchläuft, so wird C_1 und damit A_2

mit bewegt; man wird also den Ort des Unterstützungspunktes für den geraden Hebel so bestimmen können, dass an seinem zweiten Ende A_2 die Bewegung δs_2 entsteht. Dasselbe können wir nun mit A_2, A_3, A_3 und A_4 etc. mit einem ganzen Systeme machen. – Das ganze Hebelsystem macht also das déplacement mit, auch ohne die materiellen Punkte (resp. Körper) in $A_1 A_2 \ldots$. Nun haben wir aber bei einem Hebel nachgewiesen, dass wenn die Summe der virtuellen Momente positiv ist Bewegung stattfindet, wenn sie aber ~~Oder~~ negativ ist, keine Bewegung stattfindet: dasselbe muss natürlich bei einem Hebelsystem stattfinden. Bringt man nun dieses Hebelsystem Punkt für Punkt mit dem zu betrachtenden Systeme ($A_1 A_2 \ldots$) zusammen, so kann von den Körpern das Déplacement auch nicht erzeugt werden, weil sonst die Hebel bewegt werden würden, die sich im Gleichgewicht befinden sollen. –

Wie wir es hier für ein beliebiges Déplacement nachgewiesen haben so lässt es sich auch für jedes déplacement beweisen, der Beweis für < 0 ist auch ähnlich zu führen. –

Man könnte hier noch auf die an den Zwischenpunkten $C_1 C_2 \ldots$ entstehenden Kräfte eingehen, indem man zuerst für zwei Kräfte die Zwischenkraft bestimmt, und dann weiter schliesst, doch wollen wir ~~näher~~ auf den Beweis, also auch hierauf nicht eingehen. –

~~[illegible]~~ Dynamischer Beweis d. des Princips. Ehe wir zum eigentlichen dynamischen Beweise übergehen, wollen wir theils aus Principien, theils aus schon bewiesenen Sätzen das Zusammenstellen, was wir zum Beweise anwenden werden. –

1) Eine Kraft ist nicht im Stande dazu beizutragen, dass ihr Angriffspunkt auf einem Wege fortschreitet, wenn sie $= 0$ ist; ebensowenig wenn sie auf der Wegrichtung senkrecht steht, oder einen stumpfen Winkel mit ihr bildet. – Der erste Punkt dieser Behauptung folgt unmittelbar aus der Definition der Kraft als Bewegung erzeugende Ursache. – Der 2te

Punkt lässt sich immer durch die Zerlegung der Bewegung auch direct erklären. – Soll sie nämlich zur Bewegung etwas beitragen so muss sie die Mittelkraft zweier andern sein: das ist aber nicht möglich weil ihre Componente nach dem Wegelemente $= 0$ ist. – Die andere Betrachtung beruht darauf, dass wenn die zu betrachtende Kraft Bewegung hervorrufen würde, so müsste es auch eine gleiche und entgegengesetzte thun: dann würden sie zusammen das Doppelte zur Bewegung beitragen, was nicht möglich ist: die Bewegung muss also $= 0$ sein. – Ebenso lässt sich der dritte Punkt auf doppelte weise erweisen. – Man kann die Kraft zerlegen in eine auf die Wegrichtung senkrechte und eine ihr entgegengesetzte, die also beide zur Bewegung nichts beitragen können und deshalb auch ihre Resultante nicht. – Im zweiten Falle nimmt man eine ebenso gerichtete Kraft auf der entgegengesetzten Seite, die dasselbe wie die erste Kraft beitragen muss, also beide zusammen das Doppelte in demselben Sinne. – Wenn aber zwei Kräfte auf einen Punkt wirken, so kann die Richtung der Wirkung nicht zwischen ihnen liegen, also würden sie zusammen im entgegengesetzten Sinne wirken, deshalb auch jede von ihnen, und sie können daher zur Bewegung nichts beitragen. –

2) Wenn die Arbeit einer Kraft auf einem Wege $= 0$ oder < 0 ist, so trägt sie nichts zur Bewegung des Mobils auf diesem Wege bei, wohl aber wenn sie > 0 ist. –

Wir setzen $\delta s = S$ und nehmen an, der Punkt habe die Masse m, so wird für die Kraft F

$$m\frac{d^2S}{dt^2} = F\cos(F,S)$$

wie wir schon früher gesehen haben. – Dann wird auch:

$$m\frac{d^2S}{dt^2}dS = F.\cos(F,S).dS \quad \text{also auch:}$$

$$\frac{m}{2}d\left(\frac{dS}{dt}\right)^2 \text{ oder } d\left\{\frac{m}{2}\left(\frac{dS}{dt}\right)^2\right\} = F\cos(F,S)\,dS$$

d.h. der Zuwachs der lebendigen Kraft ist gleich der

Arbeit der Kraft, man schreibt dies auch, $\frac{ds}{dt} = v$ gesetzt:

$$d\left(\frac{m}{2}v^2\right) = F\cos(F,s)\,ds$$

Ist also die Arbeit positiv, so muss die lebendige Kraft zunehmen. – Nun ist sie am Anfange 0; wenn aber ære Grösse von 0 aus zunimmt, so muss sie positiv werden: also ist Bewegung vorhanden, und es ist bewiesen, dass, wenn die Arbeit positiv ist, dass dann Bewegung vorhanden ist. – Ist dagegen die Arbeit $= 0$ oder < 0, so sieht man ebenso ein, dass keine Bewegung vorhanden ist. –

3) Wenn mehrere ~~Punkte~~ Kräfte auf einen Punkt wirken, so tragen sie zur Bewegung auf einem Wege nichts bei, wenn ihre Gesammtarbeit $= 0$ oder < 0 ist, dagegen tragen sie etwas dazu bei wenn dieselbe > 0 ist. – ($= 0$ wenn auch die den virtuellen entgegengesetzten Wege virtuell sind, < 0 wenn nur der Weg δs selbst virtuell ist.). –

Mit Hülfe des Parallelogramms der Kräfte folgt dies unmittelbar, indem man die Kräfte zu einer Resultante R zusammensetzt, ergiebt sich:

$$\delta s\, R\cos(R,\delta s) = \Sigma F\cos(F,\delta s).\delta s$$

und wenn man für R die Sätze 1) und 2) benützt, so ergiebt sich dieser Satz. Wollen wir es vermeiden von dem Satze des Kräfteparallelogramms Gebrauch zu machen, so stützen wir uns darauf, dass die Summe der Wirkungen gleich der Wirkung der Summe der einzelnen Kräfte auf einer Gerade ist. –

4) Bei zwei gleichen und entgegengesetzt wirkenden Kräften, wird die virtuelle Gesammtarbeit stets positiv, wenn die Kräfte das Bestreben haben die mögliche Entfernung der Angriffspunkte hervorzubringen; negativ wenn die Kräfte das Bestreben haben diejenige Veränderung der Entfernung hervorzurufen, welche nicht gestattet ist, $= 0$ wenn

die Entfernung der Angriffspunkte unverändert bleibt.
Dieser Satz ist bereits bewiesen. (~~wo?~~)
Mit diesen 4 Sätzen wollen wir das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten beweisen.

5) Gleichgewicht eines Systems von Kräften an einem beliebigen System von Angriffspunkten, wenn dieselben irgend welchen geometrischen Bedingungen unterworfen sind. —

Die Angriffspunkte seien $A_1 A_2 \ldots A_n$; die an jedem Punkte wirkenden Kräfte können in beliebiger Anzahl vorhanden sein; wir haben gesehen, dass wir sie in Bezug auf die Arbeit auf eine einzige zurückführen können, weil die Summe der ~~Kräfte~~ der einzelnen Arbeiten gleich der Kräfte der Summe der Arbeiten ist. Daher können wir ohne der Allgemeinheit zu schaden, annehmen es wirke in A_1 die Kraft F_1, in A_2 die Kraft F_2 … in A_n die Kraft F_n. —

Wir nehmen nun an, dass zwischen je zwei mit einander verbundenen Punkten sich innere Kräfte entwickeln, wenn äussere Kräfte auf dieselben wirken. — Dieselben äussern sich nur so bald und so lange die äusseren Kräfte wirken, und sie erregen; sie sind immer gleich und entgegengesetzt an jedem Punkte, sonst aber bis zu gewissen Grenzen — sie dürfen die Verbindung in der sie wirken nicht vernichten — beliebig. — Sie allein können nie Bewegung hervorrufen. — Sind die Punkte an denen sie wirken k und l, so wird in k eine Kraft wirken die wir $f(k,l)$, und in l eine, die wir $f(l,k)$ nennen wollen. — Dann ist:

$$f(k,l) = f(l,k)$$

Endlich sind sie nur dann verschieden von Null, wenn sie die Verbindung der Punkte, zwischen denen sie wirken, aufzuheben streben. —

~~Dann~~ Diese Kräfte denken wir uns in unserem System hinzu und sehen dann, dass das ganze System sich im Gleichgewicht befinden muss. — Dann muss sich aber auch jeder Punkt derselben im Gleichgewichte befinden, und es ergeben sich daher die Gleichungen:

$$F_1 \cos(F_1, \delta s_1) + f_{12}\cos(f_{12}, \delta s_1) + f_{13}\cos(f_{13}, \delta s_1) + \dots + f_{1n}\cos(f_{1n}, \delta s_1) \leqq 0$$

$$F_2 \cos(F_2, \delta s_2) + f_{21}\cos(f_{21}, \delta s_2) + f_{23}\cos(f_{23}, \delta s_2) + \dots + f_{2n}\cos(f_{2n}, \delta s_2) \leqq 0$$

etc. etc.

$$F_n \cos(F_n, \delta s_n) + f_{n1}\cos(f_{n1}, \delta s_n) + f_{n2}\cos(f_{n2}, \delta s_n) + \dots + f_{n,n-1}\cos(f_{n,n-1}, \delta s_n) \leqq 0$$

nach 2) und 3). –

Diese Gleichungen multipliciren wir resp. mit $\delta s_1, \delta s_2 \dots \delta s_n$ und addiren sie, so erhalten wir:

$$\sum \delta s_h F_h \cos(F_h, \delta s_h) + \sum\sum \delta s_k f_{kl}\cos(f_{kl}, \delta s_k) + \sum\sum \delta s_l f_{lk}\cos(f_{lk}, \delta s_l) \leqq 0$$

Wenn wir also nachweisen dass die Summe beider letzten Summen ~~nie~~ immer > 0 ist, so folgt daraus:

$$\sum \delta s_h F_h \cos(F_h, \delta s_h) \leqq 0$$

Es sind hier 4 Fälle zu unterscheiden:

Bleibt die Entfernung der Punkte k und l constant, so sind die Doppelsummen positiv

Stehen die Punkte in gar keiner Verbindung so sind f_{kl} und f_{lk} gleich Null, also die beiden Doppelsummen $= 0$. –

Ist die Verbindung der Punkte derartig, dass f_{lk} und f_{kl} ihr noch mehr zu genügen streben, so sind die Doppelsummen positiv (nach 4)

?

Streben sie dagegen der Verbindung entgegen, so werden sie gar nicht ins Leben gerufen, sind $= 0$, also auch die Summen $= 0$. –

Also ist die Doppelsumme nie negativ, so dass wir als Bedingung des Gleichgewichts gefunden haben

$$\sum F_h \delta s_h \cos(F_h, \delta s_h) \leqq 0$$

<u>Bemerkung.</u> Das Zeichen $<$ würde nie zur Geltung kommen, wenn lauter Bedingungsgleichungen vorhanden wären; es wird nur durch Ungleichungen erzeugt, auch dadurch dass von Hause aus für einzelne Punkte Bedingungen gegeben sind, z. B. die, dass sie

auf die Oberfläche gelegt sind. –
Schwieriger als der 1te Theil des Beweises, den wir hiermit beendet haben ist der Beweis des umgekehrten Satzes, der sogar zu den schwierigsten der Dynamik gehört. – Wir wollen ihn daher nicht in seiner strengsten Form geben, und wollen den zu beweisenden Satz so aussprechen:

6) Wenn die Bedingungsgleichung:

$$\sum F_h \delta s_h \cos(F_h, \delta s_h) \gtrless 0$$

von sämmtlichen virtuellen Wegen erfüllt wird, so halten sich alle Kräfte das Gleichgewicht; sollen sie dagegen Bewegung erzeugen, so muss die bestimmte Wirkung auf irgend einem virtuellen Wege positiv sein. –

Angenommen die Punkte hätten eine Bewegung ds_1, $ds_2 \ldots ds_n$ die von diesen Kräften erzeugt wäre. – Wir nehmen nun an dass in dem Zeitelement dt diese Bedingungen nur Gleichungen seien (dadurch wird die Schwierigkeit vermieden. – Zu dieser Annahme ist man wohl berechtigt, denn im Anfange des Zeitelementes dt können immerhin Gleichungen und Ungleichungen herrschen, aber während der Bewegung in noch so kleinen Zeittheilchen sind doch nur Gleichungen denkbar, wenn auch in beliebigen Zeitintervallen die Bedingungen nicht immer dieselben zu sein brauchen; z. B. es kann ein Körper sich eine Zeit lang auf einem Ellypsoid bewegen, und dann in der Tangente fortgeschleudert werden. –

Bei dieser Annahme haben wir die Gleichungen:

$$m_1 \frac{d^2 s_1}{dt^2} = F_1 \cos(F_1, s_1) + \sum f_{1k} \cos(f_{1k}, s_1)$$

$$\vdots$$

$$m_n \frac{d^2 s_n}{dt^2} = F_n \cos(F_n, s_n) + \sum f_{nk} \cos(f_{nk}, s_n)$$

Diese Gleichungen multipliciren wir mit resp. ds_1, $ds_2, \ldots ds_n$ und addiren sie, so entsteht:

$$\sum \frac{m}{2} d\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \sum F ds \cos(F, ds)$$

denn weil wir nur Gleichungen haben, werden die übrigen Glieder = 0. – Wenn man diese Gleichungen von t bis $t+\tau$, wo τ ein noch so kleines Zeitintervall ist, integrirt, so erscheint da die Bewegung zur Zeit t gleich Null sein soll:

$$\left|\sum \frac{m}{2}\left(\frac{ds_1}{dt}\right)^2\right|_{t=t+\tau} = \int_t^{t+\tau} F\,ds\cos(F_1 ds_1)$$

Wenn nun kein Gleichgewicht stattfindet so können nicht sämmtliche Geschwindigkeiten zur Zeit $t=t+\tau$ gleich Null sein, es steht dann links eine Summe von Quadraten welche positiv sein muss: dann muss aber auch rechts etwas positives stehen. – Nun kann aber ein Integral nicht positiv sein, wenn nicht die zu integrirende Grösse positiv ist: also muss, wenn Bewegung vorhanden sein soll:

$$\sum F\,ds\cos(F,ds) > 0$$ sein. –

Ostrogradsky hat diese Untersuchungen zuerst streng und ordentlich durchgeführt, und seinem Vorgange ist Richelot gefolgt. –

Dynamische Betrachtungen

Da wir hiermit den Übergang von der Statik zur Dynamik angebahnt haben, so wollen wir des Zusammenhangs wegen einige dynamische Betrachtungen anknüpfen, indem wir die vorangeschickten Betr. auf die Dynamik anwenden. –

7) Wenn die materiellen Punkte, die sich bewegen sollen $m_1 m_2 \ldots m_n$, und die sie bewegenden Kräfte $F_1 F_2 \ldots F_n$ sind, so ist:

$$\sum\left\{F\cos(F,\delta s) - m\frac{d(v\cos(v,\delta s))}{dt}\right\}\delta s = 0$$

Vorausgesetzt dass die materiellen Punkte durch Gleichungen bedingt sind, die von der Zeit unabhängig sind. – Es soll hier unter F das verstanden werden, was bei der Schwerkraft g ist, das heisst der doppelte in der Zeiteinheit zurückgelegte Weg, v ist die Geschwindigkeit des Mobils zur Zeit t, dieses v hat eine Richtung – Wir projiciren den Weg, der durch diese Geschwindigkeit allein erzeugt wird auf δs, das giebt: $v\cos(v,\delta s)$. – Wenn aus der Zeit t $(t+dt)$ geworden ist, so muss auch zu der Geschwindigkeit eine Grösse hinzugetreten sein, es muss aus $v\cos(v,\delta s)$ geworden sein:

$$v\cos(v,\delta s)+\frac{d(v\cos(v,\delta s))}{dt}\cdot\frac{dt}{2}$$

also auch

$$dt\, v\cos(v,\delta s)+\frac{d(v\cos(v,\delta s))}{dt}\cdot\frac{dt^2}{2}$$

Nun ist andererseits der durch die Kraft erzeugte Weg $\times dt$

$$dt\, v\cos(v,\delta s)+\frac{F}{m}\frac{dt^2}{2}\cos(F,\delta s)$$

diese beiden Werthe müssen einander gleich sein, und wir haben für einen Punkt bewiesen, dass:

$$F\cos(F,\delta s)-m\frac{d(v\cos(v,\delta s))}{dt}=0$$

ist. – Dasselbe findet aber bei jedem Punkte statt und so erhalten wir für jeden Punkt eine solche Gleichung. – Wenn wir jede derselben mit dem entsprechenden δs multipliziren und alle zusammenaddiren, so erhalten wir unsere obige Gleichung:

$$\sum\left\{F\cos(F,\delta s)-m\frac{d(v\cos(v,\delta s))}{dt}\right\}\delta s=0$$

die damit als richtig nachgewiesen ist. –

Zu bemerken ist noch dass dieses $F_h\cos(F_h,\delta s_h)$ nicht dasselbe ist, was wir früher damit bezeichneten, sondern nach dieser früheren Bezeichnung ist es:

$$F_h\cos(F_h\,\delta s_h)+\sum A_{hk}\cos(A_{hk},\delta s_h)$$

Bei der Addition werden dann die Summen nach k gleich null, weil wir wieder nur Gleichungen haben. –

Da wir es hier immer nur mit den Projectionen der Wege zu thun haben, so ist der Satz zugleich auch für krummlinige Wege nachgewiesen. –

$\frac{d(v\cos(v,\delta s))}{dt}$ hat hier eine andere Bedeutung wie gewöhnlich; es bedeutet nämlich, wenn sich auch δs mit der Zeit ändert, nur die Veränderung die entsteht, wenn sich v mit der Zeit ändert, also in Zeichen ausgedrückt:

$$\lim \left\{\frac{(v+dv)\cos(v+dv,\delta s) - v\cos(v,\delta s)}{dt}\right\} dt = 0$$

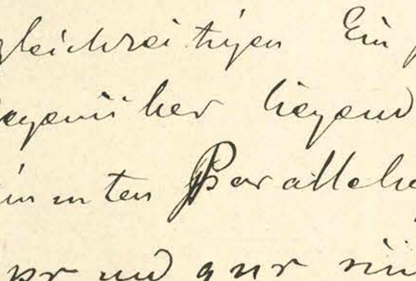
Wir wollen in Zukunft eine derartige Differentiation mit d_1 bezeichnen, da wir aber meistentheils feste aufeinander senkrechte Axen annehmen werden, so wird für diese Fälle das Zeichen 1 immer fort zu lassen sein. –

8) Man kann der in 7) bewiesenen Gleichung:

$$\sum\left\{F\cos(F,\delta s) - m\frac{d(v\cos v,\delta s)}{dt}\right\}\delta s = 0$$

eine andere Form geben und gelangt dann zu dem Hauptsatze der Dynamik – das sogenannte Hamiltonsche Integral – welche die Eigenschaft hat, dass ihre Variation verschwindet. –

Die Umformung des Ausdrucks bezweckt zweierlei; einmal soll das d_1 fortgeschafft werden, und dann soll δs unter das ~~Integral~~ Differentialzeichen gebracht werden. Um aber dann den Gang des Beweises nicht unterbrechen zu müssen, schicken wir folgende Betrachtung voraus. –



Zur Zeit t stehe das Mobil in m, zur Zeit $t+dt$ in p; die Variation δs die sich mit der Zeit auch ändern kann, bringt m nach n, so dass es zur Zeit $t+dt$ unter diesen gleichzeitigen Einflüssen in r, und nicht in der gegenüber liegenden Ecke q des durch mnp bestimmten Parallelogramms liegt. – Die Winkel qpr und qnr sind unendlich klein. – Dass qpr unendlich klein ist ergiebt sich daraus, dass wenn sich δs überhaupt mit der Zeit ändert, es sich doch nur stetig ändern kann. – Ferner sind in den Dreiecken nqr und pqr die Seiten welche die Winkel rnq und rpq einschliessen von der 1ten Ordnung, und ihre Unterschiede von der 2ten Ordnung unendlich klein. Wenn aber in einem Dreiecke zwei Seiten unendlich klein von der ersten Ordnung, ihr Unterschied unendlich klein von der zweiten Ordnung ist, so muss wenn der eingeschlossene Winkel von der ersten Ordnung ist, die gegenüberliegende Seite von der 2ten Ordnung sein und umgekehrt, wenn die dritte Seite von der 2ten Ordnung ist, der gegenüberliegende Winkel von der 1ten Ordnung verschwinden sein. —

Also muss hier qr von der 2ten Ordnung (aus Δqpr) sein, und deshalb $\angle rnq$ von der 1ten Ordnung (aus Δqnr). —

Dass jene beiden Sätze richtig sind ist leicht analytisch einzusehen. — Es ist:

$$qr^2 = pq^2 + pr^2 - 2pq\,pr\cos(qpr) \text{ oder}$$

$$qr^2 = (pq - pr)^2 + pq \cdot pr \sin^2\tfrac{1}{2}(qpr)$$

Ist hierin pq und pr von der ersten Ordnung, $(pq - pr)$ von der 2ten, so muss wenn qpr von der 1ten Ordnung ist, qr von der 2ten, und wenn qr von der zweiten Ordnung ist $\angle qpr$ von der 1ten Ordn. sein, was zu beweisen war. —

Eine dynamische Bedeutung hat der Winkel rnq nicht. —

Wir gehen jetzt zu unserer Umformung über:

Es sei $\angle(v, s) = \omega$ gesetzt, ω ändert sich auf 2erlei Weise, indem nehmlich jeder seiner Schenkel seine Richtung ändert, also haben wir die Veränderung von ω zu setzen $d_1\omega + d_2\omega$, wo $d_1\omega$ von der Änderung von v und $d_2\omega$ von der Änderung von δs herrührt. —

Wir nehmen nun allgemein eine Function fu an, ändert sich u stetig mit der Zeit, so wird:

$$d(fu\cos\omega) = f(u+du)\cos(\omega + d_1\omega + d_2\omega) - fu\cos\omega$$

und diesen Ausdruck wollen wir umformen. —

Rechts erhalten wir durch Addition und Subtraction des Gliedes $f(u+du)\cos(\omega + d_2\omega)$

$$I = f(u+du)\cos(\omega + d_1\omega + d_2\omega) + f(u+du)\cos(\omega + d_2\omega) - f(u+du)\cos(\omega + d_2\omega) - fu\cos\omega$$

da nun $\cos(\omega + d_1\omega + d_2\omega) = \cos(\omega + d_1\omega)\cos d_2\omega - \sin(\omega + d_1\omega)\sin d_2\omega$ ist

und $\cos(\omega + d_2\omega) = \cos\omega\cos d_2\omega - \sin\omega\sin d_2\omega$

Mit Vernachlässigung ~~cos d~~ höherer Potenzen können wir

$\cos d_2\omega = 1$ und $\sin d_2\omega = 0$ setzen, und erhalten dann wenn wir diese Werthe einsetzen:

$$I = f(u+du)(\cos(\omega+d_1\omega) - \cos\omega) - f(u+du)\cos(\omega+d_2\omega) - fu\cos\omega$$

Wofür wir auch folgende drei Differenzen schreiben können:

$$\{f(u+du)\cos(\omega+d_1\omega) - fu\cos\omega\} - \{(f(u+du)\cos\omega - fu\cos\omega)\} + \{f(u+du)\cos(\omega+d_2\omega) - fu\cos\omega\}$$

Jetzt gehen wir zu unserem speziellen Falle über wo: $fu = v\delta s$ ist; hier werden diese drei Differenzen

$$\{v\delta s + d(v\delta s)\cos(\omega+d_1\omega) - v\delta s\cos\omega\} - d(v\delta s)\cos\omega +$$
$$+ \{(v\delta s + d(v\delta s))\cos(\omega+d_2\omega) - v\delta s\cos\omega\}$$

diese wollen wir folgendermaassen ordnen:

$$\delta s((v+dv)\cos(\omega+d_1\omega) - v\cos\omega) + v\,d(\delta s)(\cos(\omega+d_1\omega) - \cos\omega) + \delta s\,dv(\cos(\omega+d_2\omega) - \cos\omega)$$
$$+ v\{(\delta s + d(\delta s))\cos(\omega+d_2\omega) - \delta s\cos\omega\}$$

Die beiden Mittelsten Glieder sind hierin von der 3ten Ordnung können also vernachlässigt werden; ebenso im letzten Gliede $\delta s(\cos(\omega+d_2\omega) - \cos\omega)$ – deshalb erhalten wir schliesslich:

$$+ \quad d(v\delta s\cos\omega) = \delta s((v+dv)\cos(\omega+d_2\omega) - v\cos\omega) + v\,\delta(ds),$$

Projicirt man nämlich die 4 Seiten des Vierecks auf ds, so wird

$$ds = \delta s\cos\omega + (ds+\delta ds)\cos d_1\omega - (\delta s + d\delta s)\cos(\omega+d_2\omega)$$

Hierin ist $\cos d_1\omega$ als Factor von $(ds+\delta ds)$, 1 zu setzen wodurch $(\delta s + d\delta s)\cos(\omega+d_2\omega) - \delta s\cos\omega = \delta ds$ folgt. –

In dem Ausdrucke + ist aber:

$$(v+dv)\cos(\omega+d_1\omega) - v\cos\omega = d_1(v\cos\omega)$$

nach der Definition von d_1 und $d_1\omega$. – Also wird:

$$\delta s\, d_1(v\cos\omega) = d(v\delta s\cos\omega) - v\,\delta(ds),$$

und

$$\delta s\, m\frac{d_1(v\cos\omega)}{dt} = m\left\{\frac{d(v\delta s\cos\omega)}{dt} - v\frac{\delta(ds)}{dt}\right\}$$

Diesen so umgeformten Werth setzen wir in unsere obige Gleichung:

$$\sum\left\{F\cos(F,\delta s)-m\frac{d_1(v\cos(v,\delta s))}{dt}\right\}\delta s=0$$

und erhalten:

$$\sum F\,\delta s\cos(F,\delta s)+\sum\frac{m}{2}\delta v^2=\frac{d(mv\delta s\cos(v,\delta s))}{dt}$$

weil $\frac{ds}{dt}=v$ ist und $v\delta v=\frac{1}{2}\delta v^2$. –
$\sum\frac{m}{2}\delta v^2$ ist die Variation der lebendigen Kraft, $\sum\frac{m}{2}v^2$ die lebendige Kraft selbst; wir wollen sie mit T bezeichnen; ferner führen wir als Symbol:

$$\delta U=\sum\delta s\cdot F\cos(F,\delta s)$$

ein und haben dann

$$\delta(T+U)=$$ einem exakten Differentialquotienten nach der Zeit. – Multiplizirt man daher mit dt und integrirt, so folgt nach einem Satze der Variationsrechnung:

$$\int\delta(T+U)\,dt=0$$

Dieses Integral nennt man das Hamilton'sche; von ihm ~~gehen alle~~ können alle Betrachtungen der Dynamik ausgehen. –
Diese Gleichung haben wir jedoch nur unter gewissen Voraussetzungen gewonnen, die wir deshalb hier zusammenstellen wollen. – Einmal nahmen wir nur n diskrete Punkte die von Kräften afficirt werden, und keine zusammenhängende Masse an, dann dass die zwischen diesen einzelnen Punkten obwaltenden geometrischen Bedingungen Gleichungen sind, welche von der Zeit unabhängig sein sollen. – Finden auch Ungleichungen statt, und sind die Bedingungen auch von der Zeit abhängig, so gilt nicht nur dass das Integral $=0$, sondern auch dass es <0 ist, und man gelangt dann zu den Differentialgleichungen der Bewegung. –

Über das Krümmungsmaass.

Aus den Vorlesungen Richelot's im Seminar (Sommersem. [illegible])

Wir denken uns ~~auf~~ einer Oberfläche ein beliebig begrenztes Element ds, und ziehen alle Normalen der Oberfläche längs dem Umfange des Elements. – Wir denken uns ferner um den Coordinatenanfangspunkt eine Kugel mit dem Radius 1 beschrieben, und ziehen alle Radien derselben, die den oben bezeichneten Normalen parallel sind. Wir erhalten dadurch ein Element der Kugelfläche $d\sigma$, und dann ist:

$$\frac{d\sigma}{ds} = K$$

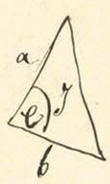
das Krümmungsmaass der Oberfläche im Punkte x, y, z der innerhalb des Elementes ds gedacht wird. Wir wählen als Element ein Dreieck, und zwar das Dreieck:

$$x, y, z \qquad x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z \qquad x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z$$

Auf der Kugeloberfläche entspricht dann diesem folgendes Dreieck:

$$\xi, \eta, \zeta \qquad \xi+\delta\xi, \eta+\delta\eta, \zeta+\delta\zeta \qquad \xi+\Delta\xi, \eta+\Delta\eta, \zeta+\Delta\zeta$$

und wir erhalten leicht die Flächeninhalte beider wenn wir die Formel $2J = a.b. \sin C$ anwenden. Wir finden auf diese Weise:



$$ds = \frac{1}{2}\sqrt{(\delta y \Delta z - \delta z \Delta y)^2 + (\delta z \Delta x - \delta x \Delta z)^2 + (\delta x \Delta y - \delta y \Delta x)^2} \quad \ldots (1)$$

$$d\sigma = \frac{1}{2}\sqrt{(\delta \eta \Delta\zeta - \delta\zeta \Delta\eta)^2 + (\delta\zeta \Delta\xi - \delta\xi \Delta\zeta)^2 + (\delta\xi \Delta\eta - \delta\eta \Delta\xi)^2} \quad \ldots (2)$$

Wir müssen nun die Form unterscheiden in der die Gleichung der Oberfläche gegeben ist. –

<u>I. Sei die Gleichung $z = f(x,y)$ gegeben</u>. – Die Gleichung der gegebenen Kugel ist mit den aus ihr durch Differentiation abgeleiteten Gleichungen:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$
$$\xi\delta\xi + \eta\delta\eta + \zeta\delta\zeta = 0$$

und:

$$\xi\Delta\xi + \eta\Delta\eta + \zeta\Delta\zeta = 0$$

Die Cosinuse der Winkel, welche der nach ξ,η,ζ gezogene Radius mit den Coordinatenaxen bildet, sind $\xi\ \eta\ \zeta$ selbst; dies müssen also auch die Cosinuse der Winkel sein, welche die Normale der Oberfläche im Punkte x, y, z mit den Axen bildet. – Drücken wir nun die Bedingungen aus, dass diese Normale senkrecht steht auf beide in x, y, z zusammentreffende Seiten des Dreiecks ds (und damit auf der Oberfläche) so haben wir:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

$$\xi\,\delta x + \eta\,\delta y + \zeta\,\delta z = 0$$

$$\xi\,\Delta x + \eta\,\Delta y + \zeta\,\Delta z = 0$$

Aus diesen beiden Systemen von Gleichungen folgen die Doppelproportionen:

$$\xi : \eta : \zeta = \delta\eta\Delta\zeta - \delta\zeta\Delta\eta : \delta\zeta\Delta\xi - \delta\xi\Delta\zeta : \delta\xi\Delta\eta - \delta\eta\Delta\xi$$

$$\xi : \eta : \zeta = \delta y\Delta z - \delta z\Delta y : \delta z\Delta x - \delta x\Delta z : \delta x\Delta y - \delta y\Delta x$$

Die unter dem Wurzelzeichen in ds und $d\sigma$ vorkommenden Ausdrücke sind also proportional, und wir können daher das Verhältniss beider Wurzeln gleich dem Verhältniss irgend zweier entsprechenden dieser Grössen setzen; also auch:

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{\delta\xi\Delta\eta - \delta\eta\Delta\xi}{\delta x\Delta y - \delta y\Delta x}$$

Es ist aber:

$$\delta\xi = \frac{\partial\xi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\xi}{\partial y}\delta y \qquad \Delta\xi = \frac{\partial\xi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\xi}{\partial y}\Delta y$$

$$\delta\eta = \frac{\partial\eta}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\eta}{\partial y}\delta y \qquad \Delta\eta = \frac{\partial\eta}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\eta}{\partial y}\Delta y$$

Also:

$$\begin{vmatrix} \delta\xi & \Delta\xi \\ \delta\eta & \Delta\eta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y} \\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \delta x & \delta y \\ \Delta x & \Delta y \end{vmatrix}$$

Daher:

$$\frac{d\sigma}{ds} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Um diese Determinante weiter umzuformen brauchen wir einen Satz welchen wir der Allgemeinheit wegen für n variable ableiten wollen. — Sei:

$$\xi_1 = \frac{f_1}{f}, \quad \xi_2 = \frac{f_2}{f} \quad \ldots\ldots \quad \xi_n = \frac{f_n}{f}$$

und die Grössen $f, f_1, f_2, \ldots f_n$ Functionen von $x_1 \ldots\ldots x_n$, dann wollen wir den Werth der Determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ \frac{\partial \xi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = A$$

bestimmen. — Durch Ausführung der Differentiation folgt die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{f f_1'{}^{x_1} - f_1 f'{}^{x_1}}{f^2}, & \frac{f f_1'{}^{x_2} - f_1 f'{}^{x_2}}{f^2} & \ldots & \frac{f f_1'{}^{x_n} - f_1 f'{}^{x_n}}{f^2} \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ \frac{f f_n'{}^{x_1} - f_n f'{}^{x_1}}{f^2}, & \frac{f f_n'{}^{x_2} - f_n f'{}^{x_2}}{f^2} & \ldots & \frac{f f_n'{}^{x_n} - f_n f'{}^{x_n}}{f^2} \end{vmatrix} = A$$

die auch folgendermassen dargestellt werden kann:

$$\begin{vmatrix} 1, & f'{}^{x_1} & , f'{}^{x_2} & \ldots & f'{}^{x_n} \\ 0, & \frac{f f_1'{}^{x_1} - f_1 f'{}^{x_1}}{f^2}, & \cdot & \ldots & \frac{f f_1'{}^{x_n} - f_1 f'{}^{x_n}}{f^2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ 0, & \frac{f f_n'{}^{x_1} - f_n f'{}^{x_1}}{f^2} & \cdot & \ldots & \frac{f f_n'{}^{x_n} - f_n f'{}^{x_n}}{f^2} \end{vmatrix} = A$$

Und hieraus folgt durch leichte Veränderungen:

$$(3)\ldots \qquad A = \frac{1}{f^{n+1}} \begin{vmatrix} f & f'x_1 & \ldots & f'x_n \\ f_1 & f_1'x_1 & \ldots & f_1'x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_n & f_n'x_1 & \ldots & f_n'x_n \end{vmatrix}$$

Ebenso kann man beweisen dass:

$$(4)\ldots \qquad \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_n \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_{n-1}} & \ldots & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_{n-1}} \end{vmatrix} = \frac{1}{f^n} \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_n \\ f_1'x_1 & f_2'x_1 & \ldots & f_n'x_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1'x_n & f_2'x_n & \ldots & f_n'x_n \end{vmatrix}$$

Wir kehren nun zu unserer Aufgabe zurück. – Es ist:

$$\xi = \frac{-\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} = \frac{-p_1}{\sqrt{1+p_1^2+p_2^2}}$$

$$\eta = \frac{-\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} = \frac{-p_2}{\sqrt{1+p_1^2+p_2^2}}$$

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+p_1^2+p_2^2}}$$

Es ist:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial p_1}\cdot\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial p_2}\cdot\frac{\partial p_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial p_1}\cdot\frac{\partial p_1}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial p_2}\cdot\frac{\partial p_2}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial p_1}\cdot\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial p_2}\cdot\frac{\partial p_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial p_1}\cdot\frac{\partial p_1}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial p_2}\cdot\frac{\partial p_2}{\partial y}$$

Also:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial p_1} & \frac{\partial \xi}{\partial p_2} \\ \frac{\partial \eta}{\partial p_1} & \frac{\partial \eta}{\partial p_2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial x} & \frac{\partial p_2}{\partial x} \\ \frac{\partial p_1}{\partial y} & \frac{\partial p_2}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Durch Ausführung der Differentiation folgt:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial p_1} & \frac{\partial \xi}{\partial p_2} \\ \frac{\partial \eta}{\partial p_1} & \frac{\partial \eta}{\partial p_2} \end{vmatrix} = \left(1+p_1^2+p_2^2\right)^{-2}$$

Also wenn man für p_1 und p_2 ihre Werthe setzt:

$$\frac{d\sigma}{ds} = \left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)^{-2} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix} \quad \ldots \quad (5)$$

II. Es sei die Gleichung der Oberfläche gegeben in der Form:

$$F(x, y, z) = 0$$

Um in diesem Falle einen symmetrischen Weg einzuschlagen gehen wir auf die beiden bereits aufgestellten Systeme von Gleichungen zurück:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

$$\xi\delta\xi + \eta\delta\eta + \zeta\delta\zeta = 0 \qquad \xi\delta x + \eta\delta y + \zeta\delta z = 0$$

$$\xi\Delta\xi + \eta\Delta\eta + \zeta\Delta\zeta = 0 \qquad \xi\Delta x + \eta\Delta y + \zeta\Delta z = 0$$

Führen wir die Bezeichnungen ein:

$$P = \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \delta\xi & \delta\eta & \delta\zeta \\ \Delta\xi & \Delta\eta & \Delta\zeta \end{vmatrix} \qquad Q = \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \delta x & \delta y & \delta z \\ \Delta x & \Delta y & \Delta z \end{vmatrix}$$

So haben wir:

$$P.\xi = \delta\eta\Delta\zeta - \delta\zeta\Delta\eta \qquad P.\eta = \delta\zeta\Delta\xi - \delta\xi\Delta\zeta$$

$$P.\zeta = \delta\xi\Delta\eta - \delta\eta\Delta\xi$$

dann:

$$Q\xi = \delta y\Delta z - \delta z\Delta y \qquad Q\eta = \delta z\Delta x - \delta x\Delta z$$

$$Q.\zeta = \delta x\Delta y - \delta y\Delta x$$

Wir erhalten also:

$$d\sigma = \frac{1}{2}P \qquad ds = \frac{1}{2}Q$$

Es ist aber hier:

$$\delta\xi = \frac{\partial\xi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\xi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\xi}{\partial z}\delta z, \quad \Delta\xi = \frac{\partial\xi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\xi}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\xi}{\partial z}\Delta z$$

$$\delta\eta = \frac{\partial\eta}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\eta}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\eta}{\partial z}\delta z, \quad \Delta\eta = \text{- - - - -}$$

$$\delta\zeta = \frac{\partial\zeta}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\delta z, \quad \Delta\zeta = \text{- - - - -}$$

Indem wir nun die ~~Glieder~~ Determinante P nach den Gliedern der ersten Horizontalreihe entwickeln, jede der entstehenden Determinanten in die Summe von drei Produkten zerlegen und die Glieder anders wieder zusammenziehen, erhalten wir:

$$P = \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \delta y & \delta z \\ \Delta y & \Delta z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \\ \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \delta z & \delta x \\ \Delta z & \Delta x \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \delta x & \delta y \\ \Delta x & \Delta y \end{vmatrix}$$

Indem man für die Grössen $(\delta y \Delta z - \delta z \Delta y)$ .. ihre Werthe setzt und den gemeinschaftlichen Factor Q vorschreibt kann man P durch folgende Determinante darstellen:

$$P = Q \cdot \begin{vmatrix} 0 & \xi & \eta & \zeta \\ \xi & \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \eta & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \zeta & \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Wir erhalten also:

$$\frac{d\sigma}{ds} = \begin{vmatrix} 0 & \xi & \eta & \zeta \\ \xi & \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \eta & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \zeta & \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Wenden wir hierauf unseren Satz an indem wir die Werthe benützen:

$$\xi = \frac{F'_x}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}$$

$$\eta = \frac{F'_y}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}$$

$$\zeta = \frac{F'_z}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}$$

So erhalten wir unmittelbar:

$$\frac{d\sigma}{ds} = \left\{(F'_x)^2+(F'_y)^2+(F'_z)^2\right\}^{-2} \begin{vmatrix} 0 & F'_x & F'_y & F'_z \\ F'_x & F''_{xx} & F''_{xy} & F''_{xz} \\ F'_y & F''_{xy} & F''_{yy} & F''_{yz} \\ F'_z & F''_{xz} & F''_{yz} & F''_{zz} \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots (7)$$

III. Wir denken uns für x und y zwei willkürliche Functionen der beiden von einander unabhängigen Variabeln u und v gesetzt, und dann die Gleichung $F(x,y,z)=0$ nach z aufgelöst, dann haben wir:

$$x = f_1(u,v) \qquad y = f_2(u,v) \qquad z = f_3(u,v)$$

Hier ist:

$$Dx = \frac{\partial x}{\partial u}Du + \frac{\partial x}{\partial v}Dv \qquad \Delta x = \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v$$

$$Dy = \frac{\partial y}{\partial u}Du + \frac{\partial y}{\partial v}Dv \qquad \Delta y = \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v$$

$$Dz = \frac{\partial z}{\partial u}Du + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot Dv \qquad \Delta z = \frac{\partial z}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial z}{\partial v}\Delta v$$

Also:

$$\begin{vmatrix} Dy & Dz \\ \Delta y & \Delta z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} Du & Dv \\ \Delta u & \Delta v \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} Dz & Dx \\ \Delta z & \Delta x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} Du & Dv \\ \Delta u & \Delta v \end{vmatrix}$$

. . . .

So dass wir hier erhalten:

$$ds = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} Du & Dv \\ \Delta u & \Delta v \end{vmatrix} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 + \left(\qquad\right)^2} \quad (8)$$

und ebenso:

$$d\sigma = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} Du & Dv \\ \Delta u & \Delta v \end{vmatrix} \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial v} - \frac{\partial \zeta}{\partial u}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial v} - \frac{\partial \eta}{\partial u}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)^2} \quad \ldots\ldots (9)$$

Durch Differentiation erhalten wir die Gleichungen:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

$$\xi\frac{\partial \xi}{\partial u} + \eta\frac{\partial \eta}{\partial u} + \zeta\frac{\partial \zeta}{\partial u} = 0$$

$$\xi \frac{\partial \xi}{\partial v} + \eta \frac{\partial \eta}{\partial v} + \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial v} = 0$$

Unter Einführung der Bezeichnung:

$$R = \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} & \frac{\partial \eta}{\partial v} & \frac{\partial \zeta}{\partial v} \end{vmatrix}$$

folgt also:

$$R.\xi = \frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial v} - \frac{\partial \eta}{\partial v}\frac{\partial \zeta}{\partial u} \qquad R.\eta = \frac{\partial \zeta}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial v}$$

$$R.\zeta = \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial v} - \frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}$$

also:

$$d\sigma = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \delta u & \delta v \\ \Delta u & \Delta v \end{vmatrix} \cdot R$$

Wir haben nun noch die Determinante R umzuformen. – Hierzu müssen wir die Werthe von $\xi\,\eta\,\zeta$ in u und v aufstellen. – Aus der durch die Werthe von x, y, z identisch erfüllten Gleichung der Oberfläche folgt durch Differentiation:

$$F'_x \frac{\partial x}{\partial u} + F'_y \frac{\partial y}{\partial u} + F'_z \frac{\partial z}{\partial u} = 0$$

$$F'_x \frac{\partial x}{\partial v} + F'_y \frac{\partial y}{\partial v} + F'_z \frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

oder wenn wir beide Gleichungen durch $\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2}$ dividiren:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

$$\xi \frac{\partial x}{\partial u} + \eta \frac{\partial y}{\partial u} + \zeta \frac{\partial z}{\partial u} = 0$$

$$\xi \frac{\partial x}{\partial v} + \eta \frac{\partial y}{\partial v} + \zeta \frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

Unter Einführung der Bezeichnungen:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \varphi_1 \,, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} = \varphi_2 \,, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \varphi_3$$

$$\varphi = \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2}$$

Folgt hieraus:

$$\xi = \frac{\varphi_1}{\varphi} \qquad \eta = \frac{\varphi_2}{\varphi} \qquad \zeta = \frac{\varphi_3}{\varphi}$$

Wenden wir also den Satz 4) an, so folgt:

$$R = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \varphi_1'u & \varphi_2'u & \varphi_3'u \\ \varphi_1'v & \varphi_2'v & \varphi_3'v \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\varphi^3}$$

Auf Grund der neuen Bezeichnungen ist aber:

$$ds = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \partial u & \partial v \\ \Delta u & \Delta v \end{vmatrix} \cdot \varphi$$

Es folgt also unmittelbar:

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{\varphi^4} \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \varphi_1'u & \varphi_2'u & \varphi_3'u \\ \varphi_1'v & \varphi_2'v & \varphi_3'v \end{vmatrix} \quad \ldots \quad (10)$$

Wir wollen diesen Ausdruck noch weiter umformen; dazu brauchen wir die Identitäten:

$$\begin{aligned} \varphi_1 f_1'u + \varphi_2 f_2'u + \varphi_3 f_3'u &= 0 \\ \varphi_1 f_1'v + \varphi_2 f_2'v + \varphi_3 f_3'v &= 0 \end{aligned} \quad \ldots \quad (11)$$

Die sich unmittelbar aus der Definition von $\varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3$ ergeben, da

$$x = f_1(u,v) \qquad y = f_2(u,v) \qquad z = f_3(u,v)$$

Differentiiren wir ~~jede~~ diese Identitäten, noch jede nach u und v, so erhalten wir die 4 weiteren Identitäten:

$$\left.\begin{aligned} \sum \varphi_h'u\, f_h'u + \sum \varphi_h\, f_h''uu &= 0 \\ \sum \varphi_h'v\, f_h'u + \sum \varphi_h\, f_h''uv &= 0 \\ \sum \varphi_h'u\, f_h'v + \sum \varphi_h\, f_h''uv &= 0 \\ \sum \varphi_h'v\, f_h'v + \sum \varphi_h\, f_h''vv &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (12)$$

Nehmen wir nun die Determinante:

Nehmen wir nun die Determinante:

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ f_1'u & f_2'u & f_3'u \\ f_1'v & f_2'v & f_3'v \end{vmatrix}$$

und multipliziren sie mit dem Werthe von $\frac{d\sigma}{ds}$, so folgt:

$$\mathfrak{D}.\frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{\varphi^4}\begin{vmatrix} \varphi^2 & ,\sum\varphi_h\varphi_h'u & ,\sum\varphi_h\varphi_h'u \\ 0 & ,\sum\varphi_h'u f_h'u & ,\sum\varphi_h'v f_h'u \\ 0 & ,\sum\varphi_h'u f_h'v & ,\sum\varphi_h'v f_h'v \end{vmatrix}$$

$$\mathfrak{D}.\frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{\varphi^2}\begin{vmatrix} \sum\varphi_h'u f_h'u & ,\sum\varphi_h'v f_h'u \\ \sum\varphi_h'u f_h'v & ,\sum\varphi_h'v f_h'v \end{vmatrix}$$

Multipliziren wir aber um den Werth der Determinante $\mathfrak{D}$ zu erhalten, die erste Verticalreihe derselben mit φ_1, und addiren dann die beiden andern resp. mit φ_2 und φ_3 multiplizirt hinzu, so folgt:

$$\mathfrak{D}\varphi_1 = \begin{vmatrix} \varphi^2 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ 0 & f_2'u & f_3'u \\ 0 & f_2'v & f_3'v \end{vmatrix} = \varphi^2\cdot\varphi_1$$

also:

$$\mathfrak{D} = \varphi^2 = \sum\varphi_h^2$$

Also folgt endlich mit Benutzung der Identitäten (12):

$$(13) \qquad \frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{\left(\sum(\varphi_h^2)\right)^2}\begin{vmatrix} \sum\varphi_h\frac{\partial^2 f_h}{\partial u^2} & ,\sum\varphi_h\frac{\partial^2 f_h}{\partial u\,\partial v} \\ \sum\varphi_h\frac{\partial^2 f_h}{\partial u\,\partial v} & ,\sum\varphi_h\frac{\partial^2 f_h}{\partial v^2} \end{vmatrix}$$

— Bei dieser Gelegenheit soll noch ein <u>anderer Ausdruck für das Differential einer Oberfläche</u> abgeleitet werden.

Wir gehen von den Gleichungen aus:

$$F'_x \frac{\partial x}{\partial u} + F'_y \frac{\partial y}{\partial u} + F'_z \frac{\partial z}{\partial u} = 0$$

$$F'_x \frac{\partial x}{\partial v} + F'_y \frac{\partial y}{\partial v} + F'_z \frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

Wozu wir als identische Gleichung nehmen:

$$x F'_x + y F'_y + z F'_z = f^2$$

wo die rechte Seite nur eine andere Bezeichnung ist. – Lösen wir diese Gleichungen auf, so folgt, wenn:

$$T = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

gesetzt wird:

$$T \cdot F'_x = f^2 \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad T \cdot F'_y = f^2 \begin{vmatrix} \quad & \quad \end{vmatrix}$$

$$T F'_z = f^2 \begin{vmatrix} \quad & \quad \end{vmatrix}$$

Wir erhalten also indem wir die frühere Bezeichnung beibehalten:

$$C = \frac{T}{f^2} \sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}$$

$$ds = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} Du & Dv \\ \Delta u & \Delta v \end{vmatrix} \cdot \varphi$$

Setzen wir $Du = du$, $Dv = dv$, $\Delta u = du$, $\Delta v = 3dv$ so folgt:

$$ds = du\, dv \cdot \varphi$$

also:

$$ds = \frac{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}{x F'_x + y F'_y + z F'_z} \begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} du\, dv \quad \ldots (14)$$

— Wir wollen nun die Formel:

$$ds = \frac{d\sigma}{K}$$

zur Quadratur des Ellypsoids anwenden. —
Zur Bestimmung des Krümmungsmaasses K benützen wir die Formel 7). — Ist die Gleichung des Ellypsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

wobei wir voraussetzen wollen $a < b < c$, so wird:

$$K = \left(\frac{4x^2}{a^4} + \frac{4y^2}{b^4} + \frac{4z^2}{c^4}\right)^{-2} \begin{vmatrix} 0 & \frac{2x}{a^2} & \frac{2y}{b^2} & \frac{2z}{c^2} \\ \frac{2x}{a^2} & \frac{2}{a^2} & 0 & 0 \\ \frac{2y}{b^2} & 0 & \frac{2}{b^2} & 0 \\ \frac{2z}{c^2} & 0 & 0 & \frac{2}{c^2} \end{vmatrix}$$

$$K = \frac{1}{a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^2}$$

Wir haben nun hier:

$$\xi^2 = \frac{\frac{x^2}{a^4}}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} \qquad \eta^2 = \frac{\frac{y^2}{b^4}}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$$

$$\zeta^2 = \frac{\frac{z^2}{c^4}}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$$

$$a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2 = \frac{1}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$$

Hieraus folgt:

$$K = \frac{(a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2)^2}{a^2b^2c^2}$$

Wir setzen nun:

$$\xi = \cos\varphi$$

$$\eta = \sin\varphi\cos\vartheta$$

$$\zeta = \sin\varphi\sin\vartheta$$

$$d\xi = -\sin\varphi\, d\varphi$$

$$d\eta = \cos\varphi \cos\vartheta\, d\varphi - \sin\varphi \sin\vartheta\, d\vartheta$$

$$d\zeta = \cos\varphi \sin\vartheta\, d\varphi + \sin\varphi \cos\vartheta\, d\vartheta$$

daher:

$$d\sigma = \sqrt{\left(\frac{\partial\eta}{\partial\varphi}\frac{\partial\xi}{\partial\vartheta} - \frac{\partial\xi}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial\varphi}\right)^2 + (\quad)^2 + (\quad)^2}\, d\varphi\, d\vartheta$$

$$\underline{d\sigma = \sin\varphi\, d\varphi\, d\vartheta}$$

Wir erhalten also:

$$ds = a^2b^2c^2 \frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\vartheta}{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi\cos^2\vartheta + c^2\sin^2\varphi\sin^2\vartheta)^2}$$

Integriren wir dieses Element in Bezug auf ϑ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ und in Bezug auf φ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$, so erhalten wir einen Oktanten des Ellypsoids. – Wir wollen die Integration in Bezug auf ϑ zunächst ausführen, dabei aber überlegen, welche Stücke wir bekommen, wenn wir zwischen engeren Grenzen integriren. – Wenn wir in Bezug auf ϑ von 0 bis 2π integriren ~~(während φ constant bleibt)~~ so müssen wir eine Zone des Ellypsoids bekommen, die rund herumläuft und von Curven begrenzt ist, auf denen (für constante ~~Werthe~~ Grenzen) φ constant ist, oder (für Grenzen die Functionen von φ sind) für die φ eine andere Gleichung erfüllt. – Wenn aber φ constant ist, so ist auch ξ, also der Winkel der Normale mit der x Achse constant. – Solcherart sind jene Curven. Bezeichnen wir nun die ganze Oberfläche des Ellypsoids mit S, so erhalten wir:

$$S = 8a^2b^2c^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\vartheta}{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi\cos^2\vartheta + c^2\sin^2\varphi\sin^2\vartheta)^2}$$

Um das Integral zu finden führen wir eine neue Grösse z ein, die wir später wieder $=0$ setzen werden. –

Es ist nehmlich unser Integral:

$$\int \frac{d\vartheta}{(a^2\cos^2\varphi + \dots)^2} = \left[\int \frac{d\vartheta}{(z + a^2\cos^2\varphi + \dots)^2}\right]_{z=0} =$$

$$= \left[-\frac{\partial}{\partial z}\int \frac{d\vartheta}{z + a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi\cos^2\vartheta + c^2\sin^2\varphi\sin^2\vartheta}\right]_{z=0}$$

Wir haben also nur dieses einfache Integral zu nehmen, den negativen Diff. Quotienten nach z zu bilden, und darin $z=0$ zu setzen, dann haben wir unser gesuchtes Integral. –

Statt aber z additiv einmal zum Nenner zu fügen, können wir es zu jedem Gliede addiren, da wir dann nur im ganzen.

$$z(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\vartheta + \sin^2\varphi\sin^2\vartheta) = z$$

hinzugefügt haben. – Wir haben also das Integral zu suchen:

$$\int \frac{d\vartheta}{(z+a^2)\cos^2\varphi + (z+b^2)\sin^2\varphi\cos^2\vartheta + (z+c^2)\sin^2\varphi\sin^2\vartheta}$$

Von hier an ist statt φ geschrieben ϑ, und statt ϑ, ω. –

Fügen wir zu dem ersten Gliede des Nenners noch die Grösse $1 = \cos^2\omega + \sin^2\omega$ als Factor hinzu, so erhalten wir, wenn wir:

$$m = (z+a^2)\cos^2\vartheta + (z+b^2)\sin^2\vartheta = z + a^2\cos^2\vartheta + b^2\sin^2\vartheta$$

$$n = (z+a^2)\cos^2\vartheta + (z+c^2)\sin^2\vartheta = z + a^2\cos^2\vartheta + c^2\sin^2\vartheta$$

setzen, unser Integral in der Form:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{m\cos^2\omega + n\sin^2\omega}$$

Setzen wir $\operatorname{tg}\omega = w$, also $\frac{d\omega}{\cos^2\omega} = dw$, so nimmt unser Integral die Gestalt an:

$$\int_0^\infty \frac{dw}{m+nw^2} = \frac{1}{m}\int_0^\infty \frac{dw}{1+\frac{n}{m}w^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{mn}}\left[\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{n}{m}}\,w\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2\sqrt{mn}}$$

Dieses Integral haben wir nun nach z zu differentiiren und dann $z=0$ zu setzen, um unser Integral zu finden. — Es folgt:

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{mn}}\right) = \frac{\pi}{2}\,\frac{m\frac{\partial n}{\partial z}+n\frac{\partial m}{\partial z}}{2\,(mn)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pi}{4}\,\frac{m+n}{m^{\frac{3}{2}}n^{\frac{3}{2}}}$$

Wir setzen nun $z=0$ und erhalten:

$$J = 2\pi a^2b^2c^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a^2\cos^2\vartheta + b^2\sin^2\vartheta + c^2\sin^2\vartheta}{(a^2\cos^2\vartheta + b^2\sin^2\vartheta)(a^2\cos^2\vartheta + c^2\sin^2\vartheta)}\cdot\sin\vartheta\, d\vartheta$$

$$J = 2\pi a^2b^2c^2\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta\sin\vartheta}{(a^2\cos^2\vartheta+b^2\sin^2\vartheta)^{\frac{1}{2}}(a^2\cos^2\vartheta+c^2\sin^2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}\right. +$$

$$\left. + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta\sin\vartheta}{(a^2\cos^2\vartheta+b^2\sin^2\vartheta)^{\frac{3}{2}}(a^2\cos^2\vartheta+c^2\sin^2\vartheta)^{\frac{1}{2}}}\right\}$$

Setzen wir nun:

$$a^2\cos^2\vartheta + c^2\sin^2\vartheta = c^2\cos^2\varphi$$

Indem wir den Hülfswinkel φ einführen, so wird:

$$-\sin\vartheta\, d\vartheta = \sqrt{\frac{c^2}{c^2-a^2}}\,\cos\varphi\, d\varphi$$

und

$$a^2\cos^2\vartheta + b^2\sin^2\vartheta = \frac{1}{c^2-a^2}\left(a^2c^2\sin^2\varphi + b^2c^2\cos^2\varphi - a^2b^2\right)$$

$$a^2\cos^2\vartheta + b^2\sin^2\vartheta = b^2 - c^2\frac{b^2-a^2}{c^2-a^2}\sin^2\varphi = b^2\left(1-\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{b^2-a^2}{c^2-a^2}\sin^2\varphi\right)$$

Setzen wir nun noch

$$\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{b^2-a^2}{c^2-a^2} = k^2$$

Wo dann k^2 immer positiv und <1 sein muss, und

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \Delta\varphi$$

So geht unsere Formel über in:

$$S = -\frac{2\pi a^2 b^2 c^2}{\sqrt{c^2-a^2}}\cdot\int d\varphi \cos\varphi\left\{\frac{1}{bc^2\cos^3\varphi\,\Delta\varphi}+\frac{1}{b^2\cos\varphi\,\Delta^3\varphi}\right\}$$

Wir haben hier noch die Grenzen der Integration zu bestimmen: — Aus der Substitutionsformel folgt:

$$\cos^2\vartheta = \frac{c^2}{c^2-a^2}\sin^2\varphi$$

für $\vartheta = 0$ wird $\varphi = \arc\sin\left(\pm\sqrt{\frac{c^2-a^2}{c^2}}\right) = \alpha$

" $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ " $\varphi = 0$

Kehren wir also die Grenzen des Integr. um, so folgt:

$$S = +\frac{2\pi a^2 b^2 c^2}{\sqrt{c^2-a^2}}\int_0^\alpha d\varphi\left\{\frac{1}{c^2\cos^2\varphi\,\Delta\varphi}+\frac{1}{b^2\,\Delta^3\varphi}\right\}$$

Wenn wir aber folgende Ausdrücke differentiiren, haben wir indem wir setzen $k'^2 = 1-k^2$

$$\frac{1}{k'^2}\cdot\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\sin\varphi\,\Delta\varphi}{\cos\varphi}\right) = \frac{1}{\cos^2\varphi\,\Delta\varphi} - \frac{1}{\Delta\varphi} + \frac{\Delta\varphi}{k'^2}$$

$$\frac{k^2}{k'^2}\cdot\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta\varphi}\right) = \frac{\Delta\varphi}{k'^2} - \frac{1}{\Delta\varphi^3}$$

Benützen wir diese Ausdrücke so können wir unsere beiden Integrale auf elliptische der 1ten und 2ten Gattung zurückführen, und erhalten, wenn wir die Grenzen einsetzen:

$$S = \frac{2\pi a^2 b^2 c^2}{\sqrt{c^2-a^2}}\left\{-\frac{k^2}{b^2k'^2}\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\Delta\alpha} + \frac{1}{c^2k'^2}\frac{\sin\alpha\,\Delta\alpha}{\cos\alpha} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{b^2k'^2}+\frac{1}{c^2k'^2}\right)\int_0^\alpha d\varphi\cdot\Delta\varphi + \frac{1}{c^2}\int_0^\alpha\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}\right\}$$

wo $\cos\alpha = \frac{a}{c}$ und $\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{b^2-a^2}{c^2-a^2} = k^2$

Hiermit ist die Quadratur des Ellypsoids vollständig ausgeführt. —